$\zeta(2k)$

ÓSCAR CIAURRI, LUIS M. NAVAS, FRANCISCO J. RUIZ, AND JUAN L. VARONA

Удиртгал. Бид Эйлерийн $\zeta(2k)$, энд $k = 1, 2, 3, \ldots$. шинэ баталгааг толилуулж байна. Баталгаа ердөө Бернулын олон гишүүнт, хураагддаг цуваа, интеграл ашигласан.

1. Зарим нэг хэрэгтэй Фактууд

Бидний батлахыг хүсэж буй үр дүн бол

$$\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

энд B_k нь k дугаар Бернулын тоо. Энэ үр дүнг анх Эйлер 1740 онд батлсан.

1.1. **Бернулын олон гишүүнт.** $B_k(t)$ -г Бернулын олон гишүүнт гэнэ. Уг олон гишүүнт дараах чанаруудтай.

$$\frac{xe^{xt}}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \frac{x^k}{k!},$$

ба эндээс шууд

$$B_0(t) = 1, \quad B_k'(t) = kB_{k-1}(t), \qquad k \geq 1, \tag{2}$$

гэж мөрдөнө. Мөн

$$\int_0^1 B_k(t)\, dt = 0, \qquad k \geq 1. \tag{3}$$

Дараа хэрэг болох үүднээс Бернулын олон гишүүнтийн эхний хэдэн гишүүнийг харуулья.

$$B_0(t) = 1, \qquad B_1(t) = t - \frac{1}{2}, \qquad B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

Бернулын тоог $B_k = B_k(0)$ ингэж тодорхойлоод , (2) болон (3) -аас $k \geq 2$ хувьд $B_k(0) = B_k(1)$ ийм байдгийг харж болно. Цаашилбал индукцээр

$$B_k(1-t) = (-1)^k B_k(t), \qquad k \geq 0$$

болно. Эндээс

$$\begin{aligned} B_{2k}(1) = B_{2k}(0) = B_{2k}, \qquad k \geq 0, \\ B_{2k+1}(1) = B_{2k+1}(0) = 0, \qquad k \geq 1. \end{aligned} \tag{4}$$

This paper has been published in: *Amer. Math. Monthly* **122** (2015), no. 5, 444–451.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 40C15; Secondary 11M06.

Key words and phrases. Riemann zeta function, Bernoulli polynomials, Bernoulli numbers, telescoping series.

The research of the authors is supported by grant MTM2012-36732-C03-02 of the DGI.

болно.

2. $\zeta(2k)$ -ийг тооцоолох нь

2.1. Нэгэн интеграл. Дараах интегралыг авч үзье.

$$I(k,m) := \int_0^1 B_{2k}(t)\cos(m\pi t)\,dt, \qquad k \geq 0,\ m \geq 1.$$

$m \geq 1$ хувьд $I(0,m) = 0$ болно.$k \geq 1$ хувьд 2 удаа хэсэгчилж (2)-г ашиглавал

$$\begin{aligned} I(k,m) &= \frac{1}{m\pi}\Big[B_{2k}(t)\sin(m\pi t)\Big]_{t=0}^{t=1} - \frac{2k}{m\pi}\int_0^1 B_{2k-1}(t)\sin(m\pi t)\,dt \\ &= \frac{2k}{m^2\pi^2}\Big[B_{2k-1}(t)\cos(m\pi t)\Big]_{t=0}^{t=1} - \frac{2k(2k-1)}{m^2\pi^2}\,I(k-1,m), \end{aligned}$$

болно. зарим нэг тухайн тохиолдолуудыг сонирхвол

$$I(1,m) = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)\cos(m\pi t)\,dt = \begin{cases} 0, & m = 1,3,5,\dots, \\ \dfrac{2}{m^2\pi^2}, & m = 2,4,6,\dots \end{cases}$$

ба (4)-өөр дараах реккурент харьцаа биелнэ.

$$I(k,m) = -\frac{2k(2k-1)}{m^2\pi^2}\,I(k-1,m), \qquad k \geq 2.$$

Эндээс

$$I(k,m) = \begin{cases} 0, & m = 1,3,5,\dots, \\ \dfrac{(-1)^{k-1}(2k)!}{m^{2k}\pi^{2k}}, & m = 2,4,6,\dots. \end{cases} \tag{5}$$

болохыг харж болно.

Одоо $B_k^*(t) = B_k(t) - B_k(0) = B_k(t) - B_k$, гэх мэт, гэж тэмдэглээд дараах интегралыг авч үзье.

$$I^*(k,m) := \int_0^1 B_{2k}^*(t)\cos(m\pi t)\,dt = \int_0^1 (B_{2k}(t) - B_{2k})\cos(m\pi t)\,dt$$

ба энэ нь бүүр $I(k,m)$ тэнцүү, яагаад гэвэл $\int_0^1 \cos(m\pi t)\,dt$ бүхэл $m > 0$ ний хувьд тэг. Эндээс бэхлэгдсэн $k \geq 1$ хувьд (5) дээгүүр m-ээр нийлбэрчилбэл

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k}\pi^{2k}}\,\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{\pi^{2k}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)^{2k}} = \sum_{m=1}^{\infty} I^*(k,2m) = \sum_{m=1}^{\infty} I^*(k,m).$$

болно.

2.2. Хураах заль. Дараах адилтгал илэрхий.

$$\cos(mx) = \frac{\sin(\frac{2m+1}{2}x) - \sin(\frac{2m-1}{2}x)}{2\sin(\frac{x}{2})}. \tag{6}$$

Үүнийг ашиглаад

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k}\pi^{2k}}\,\zeta(2k) &= \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 B_{2k}^*(t)\cos(m\pi t)\,dt \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{N}\left(\int_0^1 B_{2k}^*(t)\frac{\sin(\frac{2m+1}{2}\pi t)}{2\sin(\frac{\pi t}{2})}\,dt - \int_0^1 B_{2k}^*(t)\frac{\sin(\frac{2m-1}{2}\pi t)}{2\sin(\frac{\pi t}{2})}\,dt\right) \\ &= \left(\lim_{N\to\infty}\int_0^1 B_{2k}^*(t)\frac{\sin(\frac{2N+1}{2}\pi t)}{2\sin(\frac{\pi t}{2})}\,dt\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 B_{2k}^*(t)\,dt.\end{aligned}$$

гаргаж авах ба (3)-г ашиглавал тэр хасагдаж байгаа нөхөрийн утга

$$\frac{1}{2}\int_0^1 B_{2k}^*(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (B_{2k}(t) - B_{2k})\,dt = -\frac{B_{2k}}{2}.$$

болно. Одоо бид эхний хязгаарын утга 0 гэдгийг харуулна. Үүний тулд

$$f(t) = \frac{B_{2k}^*(t)}{2\sin(\frac{\pi t}{2})}, \qquad t \in (0,1],$$

гэж тэмдэглэе. Мөн $(2N+1)\pi/2$ ийг R ээр тэмдэглээд хэсэгчилбэл

$$\int_0^1 f(t)\sin(Rt)\,dt = -\frac{\cos(R)}{R}f(1) + \frac{1}{R}f(0) + \int_0^1 f'(t)\frac{\cos(Rt)}{R}\,dt.$$

болно. $f'(t)$ зааглагдсан гэдгээс $R \to \infty$ байх үед дээрх нийлбэр 0 уруу тэмүүлнэ. Эндээс

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k}\pi^{2k}}\,\zeta(2k) = \frac{B_{2k}}{2},$$

болж батлагдав.

Энэ өгүүлэл 2015 5 сарын "The American Mathematical Monthly "сэтгүүлд хэвлэгдсэн. (Vol. 122, No. 5 (May 2015), 444-451)