Шагдар Батхишиг

Тэгш хэмт олон гишүүнт эгэл тэгш хэмт олон гишүүнтүүдэд задрах

Гарчиг

1 Тэгш хэмт олон гишүүнт эгэл тэгш хэмт олон гишүүнтүүдэд задрах 3

1.1 Тэгш хэмт олон гишүүнт 3

1.2 Үндсэн теорем 4

Бүлэг 1

Тэгш хэмт олон гишүүнт эгэл тэгш хэмт олон гишүүнтүүдэд задрах

§1.1. Тэгш хэмт олон гишүүнт

A бүхлийн муж дээрх $A[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ олон гишүүнтийн цагиргийг авч үзье. Аливаа $\tau \in S_n$ орлуулгын хувьд $\tilde{\tau} : A[X_1, X_2, \ldots, X_n] \to A[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ буулгалтыг дурын $f \in A[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ олон гишүүнтэд

$$(\tau f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\left(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)}\right)$$

дүрмээр τf олон гишүүнтийг харгалзуулъя. Тэгвэл $\tilde{\tau}$ буулгалт нь цагиргийн автоморфизм (өөрт буулгах изоморфизм) болохыг шалгаж болно.

Жишээ 1.1.1. *Хэрэв* $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ *ба* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2$ *бол*

$$(\tau f)(x_1, x_2, x_3) = f\left(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}\right) = f(x_2, x_3, x_1) = x_2^2 + 2x_2x_3 + x_1^2$$

болно.

Тодорхойлолт 1.1.1. Хэрэв аливаа $\tau \in S_n$ орлуулгын хувьд $\tau f = f$ байх f олон гишүүнтийг *тэгш хэмтэй* олон гишүүнт гэж нэрлэдэг.

Жишээ 1 -д авч үзсэн олон гишүүнт тэгш хэмтэй бус олон гишүүнт юм.

Дараах олон гишүүнтүүд нь тэгш хэмтэй олон гишүүнтүүд болно:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_k; \\
\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} x_{i_1}x_{i_2}; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1x_2\ldots x_n.
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

Эдгээр олон гишүүнтийг *эгэл тэгш хэмтэй* олон гишүүнтүүд гэж нэрлэдэг.

$A[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ олон гишүүнтийн цагираг дээр шинэ хувьсагч Y -ээс хамаарах

$$f(y) = (y - x_1)(y - x_2)\cdots(y - x_n) = y^n - \sigma_1 y^{n-1} + \sigma_2 y^{n-2} - \ldots + (-1)^n \sigma_n \tag{1.1.2}$$

олон гишүүнтийг авч үзье. Тэгвэл $y - x_1, y - x_2, \ldots, y - x_n$ шугаман үржигдэхүүнүүдийн дурын орлуулгуудын хувьд (1.1.2) тэнцлийн зүүн гар тал үл өөрчлөгдөнө. Иймд σ_k - тэгш хэмтэй олон гишүүнт болно.

Хэрэв $f, g \in A[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ олон гишүүнтүүд нь тэгш хэмтэй олон гишүүнт бол $\tilde{\tau}$ автоморфизмын хувьд

$$\tilde{\tau}(f + g) = \tilde{\tau}(f) + \tilde{\tau}(g) = f + g, \quad \tilde{\tau}(fg) = \tilde{\tau}(f)\tilde{\tau}(g) = fg$$

байх тул тэгш хэмтэй олон гишүүнтүүдийн шугаман эвлүүлгэ ба тэдгээрийн үржвэр мөн тэгш хэмтэй олон гишүүнт болно. Иймд *бүх тэгш хэмтэй олон гишүүнтүүдийн олонлог $A[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ цагирагт дэд цагирагийг үүсгэнэ.*

§1.2. Үндсэн теорем

$g \in A[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$ олон гишүүнтийг авч үзье. $Y_1, \ldots, Y_n$ хувьсагчуудад харгалзан үндсэн тэгш хэмтэй $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ олон гишүүнтүүдийг орлуулахад үүсэх

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_n(x_1, \ldots, x_n))$$

олон гишүүнт нь мэдээж тэгш хэмтэй олон гишүүнт байна.

g олон гишүүнтэд орох $y_1^{i_1}y_2^{i_2}\cdots y_n^{i_n}$ нэг гишүүнтийн хувьсагч бүрийн хувьд $y_k=\sigma_k(x_1,\dots,x_n)$ гэж орлуулахад үүсэх $x_1,\dots,x_n$ хувьсагчаас хамаарах олон гишүүнт нь нэгэн төрлийн олон гишүүнт байх ба $\deg\sigma_k=k$ тул уг олон гишүүнтийн зэрэг нь $i_1+2i_2+\ldots+ni_n$ -тэй тэнцүү байна. $i_1+2i_2+\ldots+ni_n$ нийлбэрийг $y_1^{i_1}y_2^{i_2}\cdots y_n^{i_n}$ *нэг гишүүнтийн жин* гэж нэрлэдэг. g олон гишүүнтэд орох бүх нэг гишүүнтүүдийн максималь жинг $g(y_1,\dots,y_n)$ *олон гишүүнтийн жин* гэж нэрлэдэг.

Теорем 1.2.1 (Тэгш хэмтэй олон гишүүнтийн үндсэн теорем). *A бүхлийн муж ба $f\in A[X_1,\dots,X_n]$ олон гишүүнт нь m зэргийн тэгш хэмтэй олон гишүүнт байг. Тэгвэл*

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=g\left(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n\right)$$

тэнцлийг хангах m жинтэй $g\in A[Y_1,\dots,Y_n]$ олон гишүүнт цор ганц олдоно.

Баталгаа. Теоремын баталгааг хоёр үе шаттайгаар гүйцэтгэе.

1. *g олон гишүүнт оршин байх.* Хувьсагчийн тоо n ба олон гишүүнтийн зэрэг m гэсэн хоёр параметрээс хамааруулан индукцээр нотлон харуулъя. $n=1$ үед $\sigma_1=x_1$ ба $f(x_1)=f(\sigma_1)$ болох тул теорем биелнэ. Иймд хувьсагчийн тоо нь $n-1$ -ээс хэтрэхгүй тэгш хэмтэй f олон гишүүнтийн хувьд теоремыг хангах g олон гишүүнт олддог гэж үзье. Энд $m=\deg f$ гэж авч үзнэ. $m=0$ үед f олон гишүүнт нь A цагиргийн элемент болох тул нотлох зүйл үгүй. Мөн m -ээс бага зэргийн дурын тэгш хэмтэй олон гишүүнтийн хувьд теоремыг хангах g олон гишүүнт олдоно гэж үзнэ.

$m=\deg f$ байх $f(x_1,\dots,x_n)$ гэсэн тэгш хэмтэй олон гишүүнтийн хувьд теоремыг батлая. $x_n=0$ гэж орлуулбал индукцийн таамаглал ёсоор

$$f(x_1,\dots,x_{n-1},0)=g_1\left((\sigma_1)_0,\dots,(\sigma_{n-1})_0\right)$$

тэнцлийг хангах $g_1\in A[Y_1,\dots,Y_{n-1}]$ олон гишүүнт олдоно. Энд

$$(\sigma_k)_0=\sigma_k(x_1,\dots,x_{n-1},0),\quad k=1,2,\dots,n-1.$$

Мэдээж $(\sigma_1)_0,\dots,(\sigma_{n-1})_0$ -ууд нь $x_1,\dots,x_{n-1}$ хувьсагчуудаас хамаарсан үндсэн тэгш хэмтэй олон гишүүнт байх ба $\deg g_1(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\le m$ байна.

$$f_1(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_n)-g_1(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\tag{1.2.1}$$

олон гишүүнтийг авч үзье. Энэ олон гишүүнт нь тэгш хэмтэй байх ба $\deg f_1\le m$ байна.

$f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0$ байх тул Бэзугийн теорем ёсоор $x_n \mid f_1$. Тэгш хэмтэй гэдгээс $x_k \mid f_1, k = 1, 2, \ldots, n$ болох ба эндээс $\sigma_n = x_1 \cdots x_n \mid f_1$. Иймд

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_n \cdot f_2(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.2.2}$$

байна. Энд f_2 тэгш хэмтэй олон гишүүнт байх ба $\deg f_2 = \deg f_1 - n \leq m - n$. f_2 олон гишүүнтийн зэрэг нь m -ээс бага байх тул индукц ёсоор $f(x_1, \ldots, x_n) = g_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ тэнцлийг хангах $g_2(y_1, \ldots, y_n)$ олон гишүүнт олдоно. (1.2.1) ба (1.2.2) тэнцлийг ашиглавал

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) + \sigma_n \cdot g_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

болох ба m -ээс хэтрэхгүй жинтэй $g = g_1(y_1, \ldots, y_n) + y_n g_2(y_1, \ldots, y_n)$ олон гишүүнт олдоно. $\deg f = m$ тул g олон гишүүнтийн жин m -ээс бага байж үл болно. Иймд g олон гишүүнтийн жин яг m байна.

2. *Цор ганц оршин байх.* $f = g_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = g_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ бол $g(y_1, \ldots, y_n) = g_1 - g_2 \neq 0$ ба $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0$ нөхцөлүүдийг хангах $g \in A[Y_1, \ldots, Y_n]$ олон гишүүнт олдоно. Энэ нь $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ -ууд A цагираг дээр алгебрын хамааралтай болохыг илтгэнэ. Индукцээр $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ -ууд A цагираг дээр алгебрын хамааралгүй гэж харуулая.

Эсрэгээс нь $g(y_1, \ldots, y_n)$ олон гишүүнт нь $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0$ байх хамгийн бага зэргийн тэгээс ялгаатай олон гишүүнт болог. g олон гишүүнтийг $A[Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$ цагираг дээрх олон гишүүнт гэж авч үзвэл

$$g(y_1, \ldots, y_n) = g_0(y_1, \ldots, y_{n-1}) + g_1(y_1, \ldots, y_{n-1})y_n + \ldots + g_k(y_1, \ldots, y_{n-1})y_n^k,$$

$\deg_n g = k$ хэлбэрээр бичиж болно. Хэрэв $g_0 = 0$ бол $g = y_n h$, $h \in A[Y_1, \ldots, Y_n]$ болно. Эндээс $\sigma_n h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0$ ба $A[X_1, \ldots, X_n]$ цагираг тэгийн хуваагчгүй тул $h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0$ байна. $\deg h(y_1, \ldots, y_n) = \deg g(y_1, \ldots, y_n) - 1 < \deg g(y_1, \ldots, y_n)$ байх тул энэ нь g олон гишүүнтийн хамгийн бага зэрэгтэй гэдгийг зөрчинө. Иймд $g_0 \neq 0$ байна.

$$g_0(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) + \ldots + g_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})\sigma_n^k = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0$$

тэнцэлд $x_n = 0$ гэж орлуулбал

$$g_0\left((\sigma_1)_0, \ldots, (\sigma_{n-1})_0\right) = 0$$

болно. Энд $(\sigma_1)_0, \ldots, (\sigma_{n-1})_0$ -ууд нь $X_1, \ldots, X_{n-1}$ хувьсагчдаас хамаарсан үндсэн тэгш хэмтэй олон гишүүнтүүд. Нөгөө талаас индукцийн таамаглал ёсоор

$(\sigma_1)_0, \ldots, (\sigma_{n-1})_0$ -ууд нь A цагираг дээр алгебрын шугаман хамааралгүй байх ёстой тул зөрчил үүснэ. Энэ зөрчил нь $g = g_1 - g_2 = 0$ болохыг илтгэнэ. □

$v = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ ба $w = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}$ нэг гишүүнтүүд өгөгдсөн байг. Тэгвэл $v > w$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $i_1 - j_1, i_2 - j_2, \ldots, i_n - j_n$ дараалал $0, 0, \ldots, 0, t, \ldots$ хэлбэртэй байна. Энд $t > 0$. Энэ эрэмбийг *лексограф эрэмбэ* гэж нэрлэдэг. Лексограф эрэмбээр олон гишүүнтийн хамгийн эхэлж байрлах (хамгийн их) нэг гишүүнтийг *ахмад гишүүн* гэж нэрлэдэг. Олон гишүүнтийн нэг гишүүнтүүдийг их нэг гишүүнтээс бага нэг гишүүнт руу буурах дарааллаар байрлуулж бичдэг.

Жишээ 1.2.1. *$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + x_3^2)(x_3^2 + x_1^2)$ олон гишүүнтийн нэг гишүүнтүүдийг лексограф эрэмбээр байрлуулбал*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 x_2^2 + x_1^4 x_3^2 + x_1^2 x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_3^4 + x_2^4 x_3^2 + x_2^2 x_3^4$$

эрэмбээр бичнэ. Энэ олон гишүүнтийн ахмад гишүүн нь $x_1^4 x_2^2$ болно.

Бодлого 1.2.1. *$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + x_3^2)(x_3^2 + x_1^2)$ олон гишүүнтийг үндсэн тэгш хэмтэй олон гишүүнтүүдээр илэрхийлэж бич.*

Бодолт. Энэ олон гишүүнтийн ахмад гишүүн нь $x_1^4 x_2^2$ болно. Ахмад гишүүний дараагийн нэг гишүүнтүүдийн илтгэгчээр хос үүсгэж бичвэл:

$$(4, 2, 0), (4, 1, 1), (3, 3, 0), (3, 2, 1), (2, 2, 2)$$

болно. Иймд f олон гишүүнт

$$f = \sigma_1^2 \sigma_2^2 + A\sigma_1^3 \sigma_3 + B\sigma_2^3 + C\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + D\sigma_3^2$$

хэлбэрээр үндсэн тэгш хэмтэй олон гишүүнтүүдээр илэрхийлэгдэж бичигдэнэ.

x_1, x_2, x_3 хувьсагчуудад утга өгөх замаар A, B, C, D коэффициентийг олъё.

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	0	2	1	0	2
2	-1	-1	0	-3	2	50
1	-2	-2	-3	0	4	200
1	-1	-1	-1	-1	1	8

Эндээс дараах системийг үүснэ:

$$\begin{cases} 2 &= 4 + B, \\ 50 &= -27B + 4D, \\ 200 &= -108A + 16D, \\ 8 &= 1 - A - B + C + D. \end{cases}$$

Энэ системийг бодвол $B = -2, D = -1, A = -2, C = 4$ гэж гарна. Иймд

$$(x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + x_3^2)(x_3^2 + x_1^2) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3^2$$

гэж илэрхийлэгдэж бичигдэнэ. □

Номзүй

[1] А.И. Кострикин, *ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРУ.* — М.: НАУКА, 1977.

[2] *Сборник задач по алгебре* / Под. ред. А.И. Кострикина. — М.: Физматлит, 2001.

[3] Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский, *Задачи по высшей алгебре.* — М.: Наука, 1975.

[4] М. Гуссенс, Ф. Миттельбах, А. Самарин, *Путеводитель по пакету* LaTeX. — М.: Мир, 1999.