Шагдар Батхишиг

Шурын олон гишүүнт ба түүнийг тэнцэтгэл биш батлахад ашиглах

Гарчиг

Бүлэг 1

Шурын олон гишүүнт ба тэнцэтгэл биш батлахад түүнийг ашиглах

§1.1. Шурын тэнцэтгэл биш

Теорем 1.1.1 (Шурын тэнцэтгэл биш)**.** *Сөрөг биш бодит x, y, z тоонууд болон бодит k тооны хувьд*

$$\sum_{cycl} x^k(x-y)(x-z) = x^k(x-y)(x-z)+y^k(y-z)(y-x)+z^k(z-x)(z-y) \geq 0 \quad (1.1.1)$$

тэнцэтгэл биш биелнэ. Энэ тэнцэтгэл бишийг Шурын тэнцэтгэл биш *гэж нэрлэдэг.*

Баталгаа. $x \geq y \geq z$ гэж эрэмбэлж авч үзэж болно. Эндээс $t_1 = x - y \geq 0$, $t_2 = y - z \geq 0$, $t_3 = z \geq 0$ ба $x = t_1 + t_2 + t_3$, $y = t_2 + t_3$, $z = t_3$ байна. Тэгвэл

$$\begin{aligned} & x^k(x-y)(x-y) + y^k(y-z)(y-x) + z^k(z-x)(z-y) = \\ & \quad = (t_1+t_2+t_3)^k t_1(t_1+t_2) + (t_2+t_3)^k t_2(-t_1) + t_3^k(-t_1-t_2)(-t_2) = \\ & \quad = (t_1+t_2+t_3)^k t_1^2 + \left[(t_1+t_2+t_3)^k - (t_2+t_3)^k + t_3^k\right] t_2 t_3 + t_3^k t_2^2 \end{aligned}$$

болно. $f(x) = x^k$ функц монотон тул $(t_1+t_2+t_3)^k - (t_2+t_3)^k + t_3^k \geq 0$ болно. Иймд (1.1.1) тэнцэтгэл биш биелнэ. □

Мөрдлөгөө 1.1.2. *Сөрөг биш бодит x, y, z тоонуудын хувьд*

$$\sum_{cycl} (yz)^k(x-y)(x-z) \geq 0, \quad (k \geq 0) \qquad (1.1.2)$$

тэнцэтгэл биш биелнэ.

Баталгаа. Хэрэв $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ бол Шурын тэнцэтгэл биш (1.1.1) -ээс

$$\sum_{\text{cycl}} (yz)^k(x-y)(x-z) = (xyz)^k \sum_{\text{cycl}} x^{-k}(x-y)(x-z) \geq 0$$

болно. Хэрэв $z=0$ бол

$$\sum_{\text{cycl}}(yz)^k(x-y)(x-z)=(xy)^kxy\geq 0$$

болно. Иймд (1.1.2) тэнцэтгэл биш биелнэ. □

Теорем 1.1.3. *Сөрөг биш бодит x, y, z тоонуудын хувьд*

$$\sum_{cycl}x^k(y+z)(x-y)(x-z)\geq 0, \qquad (k\geq 1), \tag{1.1.3}$$

$$\sum_{cycl}(yz)^k(y+z)(x-y)(x-z)\geq 0, \quad (k\geq 0), \tag{1.1.4}$$

тэнцэтгэл бишүүд биелнэ.

Баталгаа. $x\geq y\geq z\geq 0$ гэж эрэмбэлж авч үзэж болно. Тэгвэл $(x-y)(x-z)\geq 0$, $(z-x)(z-y)\geq 0$ ба $k\geq 1$ үед

$$x^k(y+z)-y^k(z+x)=xy(x^{k-1}-y^{k-1})+z(x^k-y^k)\geq 0$$

байна. Эндээс

$$x^k(y+z)(x-y)(x-z)+y^k(z+x)(y-z)(y-x)+z^k(x+y)(z-x)(z-y)\geq$$
$$\geq y^k(z+x)(x-y)(x-z)+y^k(z+x)(y-z)(y-x)=y^k(z+x)(x-y)^2\geq 0$$

болох ба (1.1.3) тэнцэтгэл биш батлагдана.

$k\geq 0$ үед

$$(yz)^k(y+z)(x-y)(x-z)+(zx)^k(z+x)(y-z)(y-x)+(xy)^k(x+y)(z-x)(z-y)\geq$$
$$\geq (zx)^k(z+x)(y-z)(y-x)+(xz)^k(x+z)(z-x)(z-y)=(zx)^k(z+x)(y-z)^2\geq 0$$

болох ба (1.1.4) тэнцэтгэл биш батлагдана. □

§1.2. Эгэл тэгш хэмт олон гишүүнтээр задлах

n зэргийн гурван хувьсагчийн тэгш хэмтэй $P_n\equiv P_n(x,y,z)$ олон гишүүнтийг авч үзье. Тэгвэл энэ олон гишүүнт

$$\sigma_1=x+y+z, \quad \sigma_2=xy+yz+zx, \quad \sigma_3=xyz$$

эгэл тэгш хэмтэй олон гишүүнтүүдээр нэгэн утгатай илэрхийлэгдэж бичигдэнэ. Тодруулбал

$$P_n=\sum_{i=0}^{[n/3]}F_i^{(n)}\sigma_3^i \tag{1.2.1}$$

гэж задарна. Энд

$$F_i^{(n)} = \lambda_{i,1}^{(n)}\sigma_1^{n-3i} + \lambda_{i,2}^{(n)}\sigma_1^{n-3i-2}\sigma_2 + \dots \\ + \begin{cases} \lambda_{i,\frac{1}{2}(n-3i+1)}\sigma_1\sigma_2^{\frac{1}{2}(n-3i-1)}, & \text{хэрэв } n-3i \text{ сондгой бол} \\ \lambda_{i,\frac{1}{2}(n-3i+2)}\sigma_2^{\frac{1}{2}(n-3i)}, & \text{хэрэв } n-3i \text{ тэгш бол} \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Бодлого 1.2.1. *$p_6 \equiv p_6(x,y,z) = x^6 + y^6 + z^6$ тэгш хэмт олон гишүүнтийг эгэл тэгш хэмт олон гишүүнтүүдээр илэрхийлэж бич.*

Бодолт. (1.2.1) ба (1.2.2) томъёо ёсоор

$$p_6 = F_0^{(6)} + F_1^{(6)}\sigma_3 + F_2^{(6)}\sigma_3^2 = \left(\lambda_{0,1}^{(6)}\sigma_1^6 + \lambda_{0,2}^{(6)}\sigma_1^4\sigma_2 + \lambda_{0,3}^{(6)}\sigma_1^2\sigma_2^2 + \lambda_{0,4}^{(6)}\sigma_2^3\right) + \\ + \left(\lambda_{1,1}^{(6)}\sigma_1^3 + \lambda_{1,2}^{(6)}\sigma_1\sigma_2\right)\sigma_3 + \lambda_{2,1}^{(6)}\sigma_3^2$$

илэрхийлэгдэнэ. Тодорхой бус коэффициентийн аргаар бодъё.

x	y	z	σ_1	σ_2	σ_3	p_6
1	0	0	1	0	0	1
1	-1	0	0	-1	0	2
1	1	0	2	1	0	2
2	1	0	3	2	0	65
1	1	-2	0	-3	-2	66
2	2	-1	3	0	-4	129
1	1	1	3	3	1	3

Утгуудыг өгөх замаар коэффициентуудыг олбол: $\lambda_{0,1}^{(6)} = 1$, $\lambda_{0,4}^{(6)} = -2$, $\lambda_{0,2}^{(6)} = -6$, $\lambda_{0,3}^{(6)} = 9$, $\lambda_{2,1}^{(6)} = 3$, $\lambda_{1,1}^{(6)} = 6$, $\lambda_{1,2}^{(6)} = -12$ болно. Иймд p_6 тэгш хэмт олон гишүүнт дараах хэлбэрээр эгэл тэгш хэмт олон гишүүнтүүдээр илэрхийлэгдэж бичигдэнэ

$$p_6 = \left(\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3\right) + \left(6\sigma_1^3 - 12\sigma_1\sigma_2\right)\sigma_3 + 3\sigma_3^2.$$

Энэ бичиглэлийг Ньютоны томъёог ашиглан мөн гарган авч болно. □

Бодлого 1.2.2. *$f = \prod\limits_{cycl}(y-z)^2 = (x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$ тэгш хэмт олон гишүүнтийг эгэл тэгш хэмт олон гишүүнтүүдээр илэрхийлэж бич.*

Бодолт. $f = \left(\lambda_{0,1}^{(6)}\sigma_1^6 + \lambda_{0,2}^{(6)}\sigma_1^4\sigma_2 + \lambda_{0,3}^{(6)}\sigma_1^2\sigma_2^2 + \lambda_{0,4}^{(6)}\sigma_2^3\right) + \left(\lambda_{1,1}^{(6)}\sigma_1^3 + \lambda_{1,2}^{(6)}\sigma_1\sigma_2\right)\sigma_3 + \lambda_{2,1}^{(6)}\sigma_3^2$
Тодорхой бус коэффициентийн аргаар бодъё.

x	y	z	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	0	0	1	0	0	0
1	-1	0	0	-1	0	4
1	1	0	2	1	0	0
2	1	0	3	2	0	4
1	1	-2	0	-3	-2	0
2	2	-1	3	0	-4	0
1	1	1	3	3	1	0

Утгуудыг өгөх замаар коэффициентуудыг олбол: $\lambda_{0,1}^{(6)} = 0$, $\lambda_{0,4}^{(6)} = -4$, $\lambda_{0,2}^{(6)} = 0$, $\lambda_{0,3}^{(6)} = 1$, $\lambda_{2,1}^{(6)} = -27$, $\lambda_{1,1}^{(6)} = -4$, $\lambda_{1,2}^{(6)} = 18$ болно. Иймд f тэгш хэмт олон гишүүнт

$$f = \left(\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3\right) + \left(-4\sigma_1^3 + 18\sigma_1\sigma_2\right)\sigma_3 - 27\sigma_3^2.$$

хэлбэрээр эгэл тэгш хэмт олон гишүүнтүүдээр илэрхийлэгдэнэ. □

Бодлого 1.2.3. *$f = x^4(x-y)(x-z) + y^4(y-x)(y-z) + z^4(z-x)(z-y)$ тэгш хэмт олон гишүүнтийг эгэл тэгш хэмт олон гишүүнтүүдээр илэрхийлж бич.*

Бодолт. $f = \left(\lambda_{0,1}^{(6)}\sigma_1^6 + \lambda_{0,2}^{(6)}\sigma_1^4\sigma_2 + \lambda_{0,3}^{(6)}\sigma_1^2\sigma_2^2 + \lambda_{0,4}^{(6)}\sigma_2^3\right) + \left(\lambda_{1,1}^{(6)}\sigma_1^3 + \lambda_{1,2}^{(6)}\sigma_1\sigma_2\right)\sigma_3 + \lambda_{2,1}^{(6)}\sigma_3^2$ Тодорхой бус коэффициентийн аргаар бодъё.

x	y	z	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	0	0	1	0	0	1
1	-1	0	0	-1	0	4
1	1	0	2	1	0	0
2	1	0	3	2	0	31
1	1	-2	0	-3	-2	144
2	2	-1	3	0	-4	9
1	1	1	3	3	1	0

Утгуудыг өгөх замаар коэффициентуудыг олбол: $\lambda_{0,1}^{(6)} = 1$, $\lambda_{0,4}^{(6)} = -4$, $\lambda_{0,2}^{(6)} = -7$, $\lambda_{0,3}^{(6)} = 13$, $\lambda_{2,1}^{(6)} = 9$, $\lambda_{1,1}^{(6)} = 8$, $\lambda_{1,2}^{(6)} = -22$ болно. Иймд f тэгш хэмт олон гишүүнт

$$f = \left(\sigma_1^6 - 7\sigma_1^4\sigma_2 + 13\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3\right) + \left(8\sigma_1^3 - 22\sigma_1\sigma_2\right)\sigma_3 + 9\sigma_3^2.$$

хэлбэрээр эгэл тэгш хэмт олон гишүүнтүүдээр илэрхийлэгдэнэ. □

Бодлого 1.2.4. *$f = x^3(y+z)(x-y)(x-z) + y^3(z+x)(y-x)(y-z) + z^3(x+y)(z-x)(z-y)$ тэгш хэмт олон гишүүнтийг эгэл тэгш хэмт олон гишүүнтүүдээр илэрхийлж бич.*

Бодолт. $f = \left(\lambda_{0,1}^{(6)}\sigma_1^6 + \lambda_{0,2}^{(6)}\sigma_1^4\sigma_2 + \lambda_{0,3}^{(6)}\sigma_1^2\sigma_2^2 + \lambda_{0,4}^{(6)}\sigma_2^3\right) + \left(\lambda_{1,1}^{(6)}\sigma_1^3 + \lambda_{1,2}^{(6)}\sigma_1\sigma_2\right)\sigma_3 + \lambda_{2,1}^{(6)}\sigma_3^2$
Тодорхой бус коэффициентийн аргаар бодъё.

x	y	z	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	0	0	1	0	0	0
1	-1	0	0	-1	0	-4
1	1	0	2	1	0	0
2	1	0	3	2	0	14
1	1	-2	0	-3	-2	-144
2	2	-1	3	0	-4	-36
1	1	1	3	3	1	0

Утгуудыг өгч коэффициентуудыг олбол: $\lambda_{0,1}^{(6)} = 0$, $\lambda_{0,4}^{(6)} = 4$, $\lambda_{0,2}^{(6)} = 1$, $\lambda_{0,3}^{(6)} = -5$, $\lambda_{2,1}^{(6)} = -9$, $\lambda_{1,1}^{(6)} = -1$, $\lambda_{1,2}^{(6)} = 10$ болно. Иймд f тэгш хэмт олон гишүүнт

$$f = \left(\sigma_1^4\sigma_2 - 5\sigma_1^2\sigma_2^2 + 4\sigma_2^3\right) + \left(-\sigma_1^3 + 10\sigma_1\sigma_2\right)\sigma_3 - 9\sigma_3^2.$$

хэлбэрээр эгэл тэгш хэмт олон гишүүнтүүдээр илэрхийлэгдэнэ. □

§1.3. Шурын олон гишүүнтүүд

Дараах тэгш хэмтэй олон гишүүнтүүдийг авч үзье:

$$f_{0,1}^{(n)} \equiv f_{0,1}^{(n)}(x,y,z) = \sum_{cycl} x^{n-2}(x-y)(x-z), \quad (n \geq 2), \tag{1.3.1}$$

$$f_{0,2}^{(n)} \equiv f_{0,2}^{(n)}(x,y,z) = \sum_{cycl} x^{n-3}(y+z)(x-y)(x-z), \quad (n \geq 3), \tag{1.3.2}$$

$$f_{0,j}^{(n)} \equiv f_{0,j}^{(n)}(x,y,z) = \sigma_1^{n-2j}\sigma_2^{j-3}(y-z)^2(z-x)^2(x-y)^2, \ \left(n \geq 2j,\, 3 \leq j \leq \left[\frac{n}{2}\right]\right), \tag{1.3.3}$$

$$f_{0,\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{(n)} \equiv f_{0,\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{(n)}(x,y,z) = \begin{cases} \sum (yz)^{\frac{1}{2}(n-3)}(y+z)(x-y)(x-z), & n \text{ сондгой} \\ \sum (yz)^{\frac{1}{2}(n-2)}(x-y)(x-z), & 4 \leq n \text{ тэгш} \end{cases}, \tag{1.3.4}$$

$$f_{i,j}^{(n)} \equiv f_{i,j}^{(n)}(x,y,z) = f_{0,j}^{(n-3j)}\sigma_3^i, \quad (5 \leq 3i+2 \leq n,\ i \in \mathbb{N}). \tag{1.3.5}$$

Эдгээр тэгш хэмт олон гишүүнтүүдийг *Шурын олон гишүүнт* -үүд гэж нэрлэе.

Теорем 1.3.1. *Хэрэв*

$$f_{0,j}^{(n)} = \left(a_{1,j}^{(n)}\sigma_1^n + a_{2,j}^{(n)}\sigma_1^{n-2}\sigma_2 + \ldots + a_{i,j}^{(n)}\sigma_1^{n-2i+2}\sigma_2^{i-1} + \ldots\right) + \\ + \left(a_{1,j}^{(n-3)}\sigma_1^{n-3} + a_{2,j}^{(n-3)}\sigma_1^{n-5}\sigma_2 + \ldots\right)\sigma_3 + \ldots, \tag{1.3.6}$$

бол $a_{j,j}^{(n)} = 1$ *болох ба* $1 \le i < j$ *үед* $a_{i,j}^{(n)} = 0$ *болно.*

Баталгаа. (1.3.1) ба (1.3.6) -оос x^n -ийн коэффициентуудыг авч үзвэл $1 = a_{1,1}^{(n)}$ байна. (1.3.1) ба (1.3.2) -аас $0 = a_{1,2}^{(n)}$, $1 = a_{2,2}^{(n)}$ болно.

(1.3.3) ба бодлого 1.2.2 -оос

$$\begin{aligned} f_{0,j}^{(n)} &= \sigma_1^{n-2j}\sigma_2^{j-3}\left[\left(\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3\right) + \left(-4\sigma_1^3 + 18\sigma_1\sigma_2\right)\sigma_3 - 27\sigma_3^2\right] = \\ &= \left(\sigma_1^{n-2j+2}\sigma_2^{j-1} - 4\sigma_1^{n-2j}\sigma_2^{j}\right) + \left(-4\sigma_1^{n-2j+3}\sigma_2^{j-3} + 18\sigma_1^{n-2j+1}\sigma_2^{j-2}\right)\sigma_3 - \\ &- 27\sigma_1^{n-2j}\sigma_2^{j-3}\sigma_3^2 \end{aligned}$$

болох ба $6 \le n$, $j = 3, 4, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ утгуудын хувьд $1 \le i < j$ үед $a_{i,j}^{(n)} = 0$ ба $a_{j,j}^{(n)} = 1$ байна.

$j = \left[\frac{n+2}{2}\right]$ байг. Хэрэв n сондгой бол (1.3.4) ба $f_{0,\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{(n)} - \sigma_1\sigma_2^{\frac{1}{2}(n-1)}$ ялгаврыг авч үзье. $x = 0$ гэж орлуулбал

$$f_{0,\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{(n)} - \sigma_1\sigma_2^{\frac{1}{2}(n-1)} = (yz)^{\frac{1}{2}(n-3)}(y+z)yz - (y+z)(yz)^{\frac{1}{2}(n-1)} = 0$$

болно. Иймд $x \mid f_{0,\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{(n)} - \sigma_1\sigma_2^{\frac{1}{2}(n-1)}$ ба үүнтэй адилаар $y \mid f_{0,\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{(n)} - \sigma_1\sigma_2^{\frac{1}{2}(n-1)}$, $z \mid f_{0,\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{(n)} - \sigma_1\sigma_2^{\frac{1}{2}(n-1)}$ болох бөгөөд эндээс $\sigma_3 \mid f_{0,\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{(n)} - \sigma_1\sigma_2^{\frac{1}{2}(n-1)}$ байна. Иймээс (1.3.6) -аас

$$a_{1,\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{(n)} = a_{2,\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{(n)} = \ldots = a_{\left[\frac{n}{2}\right],\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{(n)} = 0, \quad a_{\left[\frac{n+2}{2}\right],\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{(n)} = 1$$

байна. Үүнтэй адилаар n тэгш бол $f_{0,\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{(n)} - \sigma_2^{\frac{n}{2}}$ ялгаврыг авч үзнэ. □

Теорем 1.3.2. $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ *бол* $f_{i,j}^{(n)} \ge 0$ *байна.*

Баталгаа. Теорем 1.1.1, мөрдлөгөө 1.1.2 ба Теорем 1.1.3 -аас мөрдөн гарна. □

Одоо

$$P_n(1,1,1) = 0 \tag{1.3.7}$$

нөхцөлийг хангах тэгш хэмт олон гишүүнтийг авч үзье. Энэ тэгш хэмт олон гишүүнт Шурын олон гишүүнтүүдээр илэрхийлэгдэх үү? гэсэн асуудлыг авч үзье.

Теорем 1.3.3 (Үндсэн теорем)**.** *(1.3.7) нөхцөлийг хангах нэгэн төрлийн, тэгш хэмт, $2 \leq n$ зэргийн олон гишүүнт P_n бүр Шурын олон гишүүнтүүдээр илэрхийлэгдэнэ. Тодруулбал*

$$P_n = \begin{cases} \alpha_{0,1}^{(2)} f_{0,1}^{(2)}; & (n=2) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{\left[\frac{n+2}{2}\right]} \alpha_{0,j}^{(n)} f_{0,j}^{(n)} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \alpha_{1,j}^{(n)} f_{1,j}^{(n)} + \dots & \\ \qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^{\left[\frac{n+2-3\left[\frac{n-3}{3}\right]}{2}\right]} \alpha_{\left[\frac{n-3}{3}\right],j}^{(n)} f_{\left[\frac{n-3}{3}\right],j}^{(n)} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n-3\left[\frac{n}{3}\right]}{2}\right]} \alpha_{\left[\frac{n}{3}\right],j}^{(n)} f_{\left[\frac{n}{3}\right],j}^{(n)}; & (n \geq 3) \end{cases} \tag{1.3.8}$$

хэлбэрээр илэрхийлэгдэнэ.

Баталгаа. $n = 2$ үед (1.2.1) ба (1.3.7) -аас

$$P_2 = F_0^{(2)} = \lambda_{0,1}^{(2)} \sigma_1^2 + \lambda_{0,2}^{(2)} \sigma_2 = \lambda_{0,1}^{(2)} \sigma_1^2 - 3\lambda_{0,1}^{(2)} \sigma_2 = \lambda_{0,1}^{(2)} \sum (x-y)(x-z) = \lambda_{0,1}^{(2)} f_{0,1}^{(2)}$$

байна.

$$k_n = \begin{cases} 1; & (n=2) \\ \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-3}{3}\right]} \left[\frac{n+2-3i}{2} \right] \right) + \left[\frac{n-3\left[\frac{n}{3}\right]}{2} \right]; & (n \geq 3) \end{cases}$$

гэж тэмдэглэж авч үзье.

$3 \leq n$ үед (1.3.8) томъёон дахь $\alpha_{i,j}^{(n)}$ коэффициентуудыг $x_1, x_2, \dots, x_{k_n}$ гэж тэмдэглэе. Мөн (1.2.1) томъёон дахь $\lambda_{i,j}^{(n)}$ коэффициентуудыг $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k_n+1}$ гэж тэмдэглэе. $f_{i,j}^{(n)}$ олон гишүүнт тэгш хэмт тул эгэл тэгш хэмт $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -аар илэрхийлэгдэх ((1.3.5) ба (1.3.6) томъёонуудыг үз) бөгөөд үүнийг (1.3.8) томъёонд орлуулахад үүсэх бичиглэлийг (1.2.1) бичиглэлтэй тэнцүүлбэл $\sigma_1^{r_1} \sigma_2^{r_2} \sigma_3^{r_3}$ өмнөх коэффициентууд харгалзан тэнцүү байна. Эндээс теорем 1.3.1 -ийг ашигвавал

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k_n,1} & b_{k_n,2} & b_{k_n,3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{k_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdots \\ \mu_{k_n} \end{pmatrix}$$

тэгшитгэлийн систем үүснэ. Мэдээж энэ тэгшитгэлийн систем ямагт шийдтэй байх тул (1.3.8) бичиглэл оршин байна. □

§1.4. Тэнцэтгэл биш батлахад Шурын олон гишүүнтийг ашиглах

$0 \le x, y, z$ бодит тоонууд ба гурван зэргийн тэгш хэмт нэгэн төрлийн $P_3(x, y, z)$ олон гишүүнтийг авч үзье.

Өгүүлбэр 1.4.1. $P_3(1,1,1) = 0$ *бол*

$$P_3(x, y, z) = \lambda_{0,1}\sigma_1^3 + \lambda_{0,2}\sigma_1\sigma_2 + \lambda_{1,1}\sigma_3 \ge 0 \tag{1.4.1}$$

тэнцэтгэл биш биелэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$P_3(1,0,0) = \lambda_{0,1} \ge 0, \quad P_3(1,1,0) = 2(4\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2}) \ge 0 \tag{1.4.2}$$

нөхцөл биелэгдэх явдал юм.

Баталгаа. ($\Rightarrow$). Илэрхий.

($\Leftarrow$). Теорем 1.3.3 ёсоор

$$P_3(x,y,z) = \alpha_{0,1} f_{0,1}^{(3)} + \alpha_{0,2} f_{0,2}^{(3)} = \alpha_{0,1} \sum x(x-y)(x-z) + \alpha_{0,2} \sum (y+z)(x-y)(x-z)$$

болох ба $P_3(1,0,0) = \lambda_{0,1} = \alpha_{0,1} \ge 0$, $P_3(1,1,0) = 2(4\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2}) = \alpha_{0,2} \ge 0$ байна. Теорем 1.3.2 ёсоор $f_{0,1}^{(3)} \ge 0$, $f_{0,2}^{(3)} \ge 0$ тул $P_3(x, y, z) \ge 0$ байна. □

Өгүүлбэр 1.4.2. *Гурван зэргийн тэгш хэмт нэгэн төрлийн $f(x, y, z)$ олон гишүүнт бүр*

$$f(x,y,z) = \alpha_{0,1} f_{0,1}^{(3)} + \alpha_{0,2} f_{0,2}^{(3)} + \alpha_{1,1}\sigma_3 \tag{1.4.3}$$

хэлбэрээр илэрхийлэгдэж бичигдэнэ. Хэрэв $0 \le x$, $0 \le y$, $0 \le z$ бол $0 \le f(x, y, z)$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $0 \le \alpha_{0,1}$, $0 \le \alpha_{0,2}$, $0 \le \alpha_{1,1}$ байна.

Баталгаа. Хэрэв $f(1,1,1) = \alpha_{1,1}$ бол $P_3(x,y,z) = f(x,y,z) - \alpha_{1,1}\sigma_3$ олон гишүүнтийн хувьд теорем 1.3.3 -ыг ашиглавал (1.4.3) бичлэг гарна.

($\Rightarrow$). $f_{0,1}^{(3)}(1,0,0) = 1$, $f_{0,1}^{(3)}(1,1,0) = 0$, $f_{0,1}^{(3)}(1,1,1) = 0$, $f_{0,2}^{(3)}(1,0,0) = 0$,
$f_{0,2}^{(3)}(1,1,0) = 2$, $f_{0,2}^{(3)}(1,1,1) = 0$ байх тул
$f(1,0,0) = \alpha_{0,1} \ge 0$, $f(1,1,0) = 2\alpha_{0,2} \ge 0$, $f(1,1,1) = \alpha_{1,1} \ge 0$ байна.

($\Leftarrow$). Теорем 1.3.2 -аас мөрдөнө. □

Бодлого 1.4.1. *Сөрөг биш x, y, z тоонууд $x + y + z = 1$ нөхцөлийг хангах бол*

$$0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(1984 он, 25-р ОУМО-ын бодлого 1)

Бодолт. Дээрх тэнцэтгэл бишийг дараах байдлаар хувиргаж авч үзье:

$$0 \le (xy + yz + zx)(x + y + z) - 2xyz \le \frac{7}{27}(x + y + z)^3$$

Өгүүлбэр 1.4.2 ёсоор

$$f(x, y, z) = \sigma_2\sigma_1 - 2\sigma_3 = \alpha_{0,1} f_{0,1}^{(3)} + \alpha_{0,2} f_{0,2}^{(3)} + \alpha_{1,1}\sigma_3$$

байна.

$$\alpha_{0,1} = f(1, 0, 0) = 0, \quad 2\alpha_{0,2} = f(1, 1, 0) = 2, \quad \alpha_{1,1} = f(1, 1, 1) = 7$$

болох тул

$$f(x, y, z) = 2f_{0,2}^{(3)} + 7\sigma_3 \ge 0$$

байна. Тэнцэтгэл бишийн зүүн гар тал биелнэ.

Одоо тэнцэтгэл бишийн баруун гар тал биелэхийг харуулъя.

$$\frac{7}{27} - (xy + yz + zx) + 2xyz = \frac{7}{27}\sigma_1^3 - \sigma_2\sigma_1 + 2\sigma_3 = \alpha_{0,1} f_{0,1}^{(3)} + \alpha_{0,2} f_{0,2}^{(3)} + \alpha_{1,1}\sigma_3$$

Энэ тохиолдолд

$$\alpha_{0,1} = f(1, 0, 0) = \frac{7}{27}, \quad 2\alpha_{0,2} = f(1, 1, 0) = \frac{2}{27}, \quad \alpha_{1,1} = f(1, 1, 1) = 0$$

болох тул

$$\frac{7}{27}\sigma_1^3 - \sigma_2\sigma_1 + 2\sigma_3 = \frac{7}{27} f_{0,1}^{(3)} + \frac{1}{27} f_{0,2}^{(3)} \ge 0$$

байна. □

Бодлого 1.4.2. *Эерэг бодит a, b, c тоонууд $abc = 1$ нөхцөлийг хангах бол*

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \le 1$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(2000 он, 41-р ОУМО-ын бодлого 2)

Бодолт. $a = \dfrac{x}{y}$, $b = \dfrac{y}{z}$, $c = \dfrac{z}{a}$ гэж орлуулбал дээрх тэнцэтгэл биш дараах хэлбэр-тэй болно:

$$f = xyz - (x + z - y)(x + y - z)(y + z - x) \ge 0$$

Өгүүлбэр 1.4.2 ёсоор

$$f = \alpha_{0,1} f_{0,1}^{(3)} + \alpha_{0,2} f_{0,2}^{(3)} + \alpha_{1,1}\sigma_3$$

илэрхийлэгдэж бичигдэх ба

$$\alpha_{0,1} = f(1,0,0) = 1, \quad 2\alpha_{0,2} = f(1,1,0) = 0, \quad \alpha_{1,1} = f(1,1,1) = 0$$

болох тул

$$f = f_{0,1}^{(3)} \geq 0$$

байна. □

$0 \leq x, y, z$ бодит тоонууд ба дөрвөн зэргийн тэгш хэмт нэгэн төрлийн $P_4(x,y,z)$ олон гишүүнтийг авч үзье.

Өгүүлбэр 1.4.3. $P_4(1,1,1) = 0$ *бол*

$$P_4(x,y,z) = \lambda_{0,1}\sigma_1^4 + \lambda_{0,2}\sigma_1^2\sigma_2 + \lambda_{0,3}\sigma_2^2 + \lambda_{1,1}\sigma_1\sigma_3 \geq 0 \tag{1.4.4}$$

тэнцэтгэл биш биелэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$P_4(x,1,1) \geq 0 \tag{1.4.5}$$

нөхцөл биелэгдэх явдал юм.

Баталгаа. (⇒). Илэрхий.

(⇐). Теорем 1.3.3 ёсоор

$$P_4(x,y,z) = \alpha_{0,1}f_{0,1}^{(4)} + \alpha_{0,2}f_{0,2}^{(4)} + \alpha_{0,3}f_{0,3}^{(4)}$$

болох ба $P_4(1,0,0) = \lambda_{0,1} = \alpha_{0,1}$, $P_4(1,1,0) = 16\lambda_{0,1} + 4\lambda_{0,2} + \lambda_{0,3} = \alpha_{0,2}$ байна. Энд

$$f_{0,1}^{(4)} \equiv \sum x^2(x-y)(x-z)$$
$$f_{0,2}^{(4)} \equiv \sum x(y+z)(x-y)(x-z)$$
$$f_{0,3}^{(4)} \equiv \sum yz(x-y)(x-z)$$

$$P_4(x,1,1) = (x-1)^2(\alpha_{0,1}x^2 + 2\alpha_{0,2}x + \alpha_{0,3}) \geq 0 \quad (x \geq 0),$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэдгээс $\alpha_{0,1} \geq 0$, $\alpha_{0,3} \geq 0$, $\alpha_{0,2} \geq -\sqrt{\alpha_{0,1}\alpha_{0,3}}$ байна.

$$P_4(x,y,z) \geq 2\sqrt{\alpha_{0,1}\alpha_{0,3}f_{0,1}^{(4)}f_{0,3}^{(4)}} - \sqrt{\alpha_{0,1}\alpha_{0,3}}f_{0,2}^{(4)} = \sqrt{\alpha_{0,1}\alpha_{0,3}}\left(2\sqrt{f_{0,1}^{(4)}f_{0,3}^{(4)}} - f_{0,2}^{(4)}\right),$$

болох бөгөөд бодлого 1.2.2 -ыг ашиглавал

$$\left(2\sqrt{f_{0,1}^{(4)}f_{0,3}^{(4)}} - f_{0,2}^{(4)}\right)\left(2\sqrt{f_{0,1}^{(4)}f_{0,3}^{(4)}} + f_{0,2}^{(4)}\right) = 4f_{0,1}^{(4)}f_{0,3}^{(4)} - \left(f_{0,2}^{(4)}\right)^2 =$$
$$= 3\sigma_1^2\left(\sigma_2^2(\sigma_1^2 - 4\sigma_2) - 2\sigma_1\sigma_3(2\sigma_1^2 - 9\sigma_2) - 27\sigma_3^2\right) = 3\sigma_1^2\prod(y-z)^2 \geq 0$$

Иймд $P_4 \geq 0$ байна. □

Өгүүлбэр 1.4.4. *Дөрвөн зэргийн тэгш хэмт нэгэн төрлийн $f(x,y,z)$ олон гишүүнт бүр*

$$f(x,y,z) = \alpha_{0,1} f_{0,1}^{(4)} + \alpha_{0,2} f_{0,2}^{(4)} + \alpha_{0,3} f_{0,3}^{(4)} + \alpha_{1,1}\sigma_1\sigma_3 \tag{1.4.6}$$

хэлбэрээр илэрхийлэгдэж бичигдэнэ. Хэрэв $0 \le x$, $0 \le y$, $0 \le z$ бол $0 \le \alpha_{0,1}$, $0 \le \alpha_{0,2}$, $0 \le \alpha_{0,3}$, $0 \le \alpha_{1,1}$ байна гэдгээс $0 \le f(x,y,z)$ гэж мөрдөн гарна.

Баталгаа. Хэрэв $f(1,1,1) = 3\alpha_{1,1}$ бол $P_4(x,y,z) = f(x,y,z) - \alpha_{1,1}\sigma_1\sigma_3$ олон гишүүнтийн хувьд теорем 1.3.3 -ыг ашиглавал (1.4.6) бичлэг гарна.

Өгүүлбэрийн хоёр дахь хэсэг нь теорем 1.3.2 -аас мөрдөнө. Энд $f(1,0,0) = \alpha_{0,1}$, $f(1,1,0) = \alpha_{0,3}$, $f(1,1,1) = 3\alpha_{1,1}$, $f(-1,0,1) = 4\alpha_{0,1} - 4\alpha_{0,2} + \alpha_{0,3}$ байна. □

Бодлого 1.4.3. *Эерэг бодит a, b, c тоонууд $abc = 1$ нөхцөлийг хангах бол*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(1995 он, 36-р ОУМО-ын бодлого 2)

Бодолт. $a = \dfrac{1}{x}$, $b = \dfrac{1}{y}$, $c = \dfrac{1}{z}$ гэж орлуулбал дээрх тэнцэтгэл биш дараах хэлбэртэй болно:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}$$

$x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ байх тул

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{1}{2}(x+y+z)$$

буюу

$$g = \sum x^2(x+y)(x+z) - \frac{1}{2}(x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x) \ge 0$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуулах хэрэгтэй.

$$g = \alpha_{0,1} f_{0,1}^{(4)} + \alpha_{0,2} f_{0,2}^{(4)} + \alpha_{0,3} f_{0,3}^{(4)} + \alpha_{1,1}\sigma_1\sigma_3$$

илэрхийлэгдэж бичигдэх ба $\alpha_{0,1} = g(1,0,0) = 1$, $\alpha_{0,3} = g(1,1,0) = 2$, $3\alpha_{1,1} = g(1,1,1) = 0$, $6 - 4\alpha_{0,2} = g(-1,0,1) = 0$ болох тул өгүүлбэр 1.4.4 ёсоор

$$g = f_{0,1}^{(4)} + \frac{3}{2}\, f_{0,2}^{(4)} + 2 f_{0,3}^{(4)} \ge 0$$

байна. □

Өгүүлбэр 1.4.5. *Таван зэргийн тэгш хэмт нэгэн төрлийн $f(x, y, z)$ олон гишүүнт бүр*

$$f(x, y, z) = \alpha_{0,1} f_{0,1}^{(5)} + \alpha_{0,2} f_{0,2}^{(5)} + \alpha_{0,3} f_{0,3}^{(5)} + \alpha_{1,1} f_{1,1}^{(5)} + \alpha_{1,2}\sigma_2\sigma_3 \tag{1.4.7}$$

хэлбэрээр илэрхийлэгдэж бичигдэнэ. Хэрэв $0 \le x$, $0 \le y$, $0 \le z$ бол $0 \le \alpha_{0,1}$, $0 \le \alpha_{0,2}$, $0 \le \alpha_{0,3}$, $0 \le \alpha_{1,1}$, $0 \le \alpha_{1,2}$ байна гэдгээс $0 \le f(x, y, z)$ гэж мөрдөн гарна. Энд

$$\begin{aligned}
f_{0,1}^{(5)} &\equiv \sum x^3(x-y)(x-z) \\
f_{0,2}^{(5)} &\equiv \sum x^2(y+z)(x-y)(x-z) \\
f_{0,3}^{(5)} &\equiv \sum yz(y+z)(x-y)(x-z) \\
f_{1,1}^{(5)} &\equiv f_{0,1}^{(2)}\sigma_3 = xyz\sum(x-y)(x-z)
\end{aligned}$$

Баталгаа. Хэрэв $f(1, 1, 1) = 3\alpha_{1,2}$ бол $P_5(x, y, z) = f(x, y, z) - \alpha_{1,1}\sigma_2\sigma_3$ олон гишүүнтийн хувьд теорем 1.3.3 -ыг ашиглавал (1.4.7) бичлэг гарна.

Өгүүлбэрийн хоёр дахь хэсэг нь теорем 1.3.2 -аас мөрдөнө. Энд $f(1, 0, 0) = \alpha_{0,1}$, $f(1, 1, 0) = 2\alpha_{0,3}$, $f(1, 1, 1) = 3\alpha_{1,2}$, $f(1, i, 0) = 2(1 + i)\alpha_{0,2} - (1 + i)\alpha_{0,3}$, $f(-1, i, 1) = -2i\alpha_{0,1} + 8i\alpha_{0,2} - 2i\alpha_{1,1} + i\alpha_{1,2}$ байна. □

Бодлого 1.4.4. *Эерэг бодит a, b, c тоонууд $a + b + c = 1$ нөхцөлийг хангах бол*

$$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \ge 1$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(2005 он, Хятадын баруун бүсийн олимпиад)

Бодолт. Дараах тэнцэтгэл биш биелнэ гэж харуулъя:

$$f(a, b, c) = 10(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c)^2 - 9(a^5 + b^5 + c^5) - (a + b + c)^5 \ge 0$$

$f(1, 0, 0) = 0 = \alpha_{0,1}$, $f(1, 1, 0) = 30 = 2\alpha_{0,3}$, $f(1, 1, 1) = 0 = 3\alpha_{1,2}$,

$$\begin{cases} f(1, i, 0) = & 15(1 + i) = 2(1 + i)\alpha_{0,2} - 15(1 + i), \\ f(-1, i, 1) = & 0 = 120i - 2i\alpha_{1,1}, \end{cases}$$

системээс $\alpha_{0,2} = 15$, $\alpha_{1,1} = 60$ болох тул өгүүлбэр 1.4.5 ёсоор

$$f(a, b, c) = 15f_{0,2}^{(5)} + 15f_{0,3}^{(5)} + 60f_{1,1}^{(5)} \ge 0$$

тэнцэтгэл биш биелнэ. □

Өгүүлбэр 1.4.6. *Зургаан зэргийн тэгш хэмт нэгэн төрлийн $f(x,y,z)$ олон гишүүнт бүр*

$$f(x,y,z) = \alpha_{0,1}f_{0,1}^{(6)} + \alpha_{0,2}f_{0,2}^{(6)} + \alpha_{0,3}f_{0,3}^{(6)} + \alpha_{0,4}f_{0,4}^{(6)} + \alpha_{1,1}f_{1,1}^{(6)} + \alpha_{1,2}f_{1,2}^{(6)} + \alpha_{2,1}\sigma_3^2 \quad (1.4.8)$$

хэлбэрээр илэрхийлэгдэж бичигдэнэ. Хэрэв $0 \leq x$, $0 \leq y$, $0 \leq z$ бол $0 \leq \alpha_{0,1}$, $0 \leq \alpha_{0,2}$, $0 \leq \alpha_{0,3}$, $0 \leq \alpha_{0,4}$, $0 \leq \alpha_{1,1}$, $0 \leq \alpha_{1,2}$, $0 \leq \alpha_{2,1}$ байна гэдгээс $0 \leq f(x,y,z)$ гэж мөрдөн гарна. Энд

$$\begin{aligned}
f_{0,1}^{(6)} &\equiv \sum x^4(x-y)(x-z)\\
f_{0,2}^{(6)} &\equiv \sum x^3(y+z)(x-y)(x-z)\\
f_{0,3}^{(6)} &\equiv \prod (y-z)^2 = (x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2\\
f_{0,4}^{(6)} &\equiv \sum (yz)^2(x-y)(x-z)\\
f_{1,1}^{(6)} &\equiv f_{0,1}^{(3)}\sigma_3 = xyz\sum x(x-y)(x-z)\\
f_{1,2}^{(6)} &\equiv f_{0,2}^{(3)}\sigma_3 = xyz\sum (y+z)(x-y)(x-z)
\end{aligned}$$

Баталгаа. Хэрэв $f(1,1,1) = 9\alpha_{2,1}$ бол $P_6(x,y,z) = f(x,y,z) - \alpha_{2,1}\sigma_3^2$ олон гишүүнтийн хувьд теорем 1.3.3 -ыг ашиглавал (1.4.8) бичлэг гарна.

Өгүүлбэрийн хоёр дахь хэсэг нь теорем 1.3.2 -аас мөрдөнө. Энд $f(1,0,0) = \alpha_{0,1}$, $f(1,1,0) = \alpha_{0,4}$, $f(1,1,1) = \alpha_{2,1}$ байна. Дараах системээс

$$\begin{cases} f(0,-1,1) = 4\alpha_{0,1} - 4\alpha_{0,2} + 4\alpha_{0,3} - \alpha_{0,4}\\ f(0,1,i) = 2\alpha_{0,1} - 2\alpha_{0,2} - 2\alpha_{0,3} + \alpha_{0,4} \end{cases}$$

$\alpha_{0,2}$ ба $\alpha_{0,3}$ коэффициентуудыг олно. Харин дараах системээс

$$\begin{cases} f(-1,1,1) = 4\alpha_{0,1} - 8\alpha_{0,2} + 4\alpha_{0,4} + 4\alpha_{1,1} - 8\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}\\ f(-1,1,i) = 2\alpha_{0,1} + 16\alpha_{0,3} - 6\alpha_{0,4} - 6\alpha_{1,1} + 8\alpha_{1,2} - \alpha_{2,1} \end{cases}$$

$\alpha_{1,1}$ ба $\alpha_{1,2}$ коэффициентуудыг олно. □

Бодлого 1.4.5. *x, y, z эерэг бодит тоонууд байг. Тэгвэл*

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Crux Mathematicorum, Problem 1940, Iran 1996)

Бодолт. Дараах тэнцэтгэл биш биелнэ гэж харуулъя:

$$\begin{aligned} f =&4(xy+yz+zx)\left[(y+z)^2(z+x)^2+(z+x)^2(x+y)^2+(x+y)^2(y+z)^2\right]- \\ &-9(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Өгүүлбэр 1.4.6 ашиглавал $\alpha_{0,1}=0$, $\alpha_{0,4}=0$, $\alpha_{2,1}=0$, $\alpha_{0,2}=4$, $\alpha_{0,3}=3$, $\alpha_{1,1}=16$, $\alpha_{1,2}=4$ болохыг тус тус олно. Иймд

$$f=4f_{0,2}^{(6)}+3f_{0,3}^{(6)}+16f_{1,1}^{(6)}+4f_{1,2}^{(6)} \geq 0$$

тэнцэтгэл биш биелнэ. □

Бодлого 1.4.6. *Эерэг бодит x, y, z тоонууд $xyz \geq 1$ нөхцөлийг хангах бол*

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(2005 он, 46-р ОУМО-ын бодлого)

Бодолт. $y^2+z^2 \geq 2yz$ байх тул

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geq \frac{x^5-x^2xyz}{x^5+(y^2+z^2)xyz}=\frac{2(x^4-x^2yz)}{2(x^4+(y^2+z^2)yz)} \geq \frac{2x^4-x^2(y^2+z^2)}{2x^4+(y^2+z^2)^2}$$

байна. Иймд

$$\sum \frac{2x^4-x^2(y^2+z^2)}{2x^4+(y^2+z^2)^2} \geq 0$$

болохыг харуулахад хангалттай. $a=x^2$, $b=y^2$, $c=z^2$ гэж орлуулбал дээрх тэнцэтгэл биш дараах хэлбэртэй болно

$$\sum \frac{2a^2-a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2} \geq 0.$$

Эндээс

$$f=\sum \left(2a^2-a(b+c)\right)\left(2b^2+(c+a)^2\right)\left(2c^2+(a+b)^2\right) \geq 0$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуулах шаардлагатай.

Өгүүлбэр 1.4.6 ашиглавал $\alpha_{0,1}=2$, $\alpha_{0,4}=24$, $\alpha_{2,1}=0$, $\alpha_{0,2}=3$, $\alpha_{0,3}=7$, $\alpha_{1,1}=18$, $\alpha_{1,2}=11$ болохыг тус тус олно. Иймд

$$f=2f_{0,1}^{(6)}+3f_{0,2}^{(6)}+7f_{0,3}^{(6)}+24f_{0,4}^{(6)}+18f_{1,1}^{(6)}+11f_{1,2}^{(6)} \geq 0$$

тэнцэтгэл биш биелнэ. □

Бодлого 1.4.7. *$\triangle ABC$ гурвалжны медиануудыг харгалзан m_a, m_b, m_c, гадаад багтсан тойргуудын радиусыг харгалзан r_a, r_b, r_c гэж тэмдэглэвэл*

$$\frac{r_a r_b}{m_a m_b}+\frac{r_b r_c}{m_b m_c}+\frac{r_c r_a}{m_c m_a}\geq 3$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Crux Mathematicorum, Problem 1680, Zun Shan and Ji Chen)

Бодолт. $2p=a+b+c$, $r_a=\sqrt{\dfrac{p(p-a)(p-c)}{p-a}}$, $m_a=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$ байх тул

$$\begin{aligned}\frac{r_a r_b}{m_a m_b}&=\frac{4p(p-a)}{\sqrt{(2a^2+2c^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}}\geq\\ &\geq\frac{8p(p-a)}{(2a^2+2c^2-b^2)+(2a^2+2b^2-c^2)}=\frac{2\left[(b+c)^2-a^2\right]}{4a^2+b^2+c^2}\end{aligned}$$

болно. Иймд бид

$$\sum\frac{2\left[(b+c)^2-a^2\right]}{4a^2+b^2+c^2}\geq 3$$

тэнцэтгэл бишийг биелнэ гэж харуулахад хангалттай.

$a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$ гэж орлуулбал дээрх тэнцэтгэл биш дараах хэлбэртэй болно

$$\sum\frac{2\left[(2x+y+z)^2-(y+z)^2\right]}{4(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}\geq 3.$$

Энэ тэнцэтгэл биш нь дараах тэнцэтгэл биштэй эквивалент

$$\begin{aligned}f=&2\sum\left[(2x+y+z)^2-(y+z)^2\right]\left[4(z+x)^2+(x+y)^2+(y+z)^2\right]\\ &\left[4(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\right]-3\prod\left[4(z+x)^2+(x+y)^2+(y+z)^2\right]\geq 0\end{aligned}$$

Өгүүлбэр 1.4.6 ашиглавал $\alpha_{0,1}=50$, $\alpha_{0,4}=810$, $\alpha_{2,1}=0$, $\alpha_{0,2}=280$, $\alpha_{0,3}=395$, $\alpha_{1,1}=1460$, $\alpha_{1,2}=864$ болохыг тус тус олно. Иймд

$$f=50f_{0,1}^{(6)}+280f_{0,2}^{(6)}+395f_{0,3}^{(6)}+810f_{0,4}^{(6)}+1460f_{1,1}^{(6)}+864f_{1,2}^{(6)}\geq 0$$

тэнцэтгэл биш биелнэ. □

Бодлого 1.4.8. *$k\geq 3+\sqrt{7}$ ба эерэг бодит x,y,z тоонуудын хувьд*

$$(x+y+z)\left(\frac{x}{x^2+kyz}+\frac{y}{y^2+kzx}+\frac{z}{z^2+kxy}\right)\geq\frac{9}{1+k}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

Бодолт. Өгөгдсөн тэнцэтгэл биш нь

$$f = (1+k)\sigma_1 \sum x(y^2+kzx)(z^2+kxy) - 9\prod(x^2+kyz) \geq 0$$

тэнцэтгэл биштэй эквивалент.

Өгүүлбэр 1.4.6 ашиглавал $\alpha_{0,1}=0$, $\alpha_{0,4}=4k^2-5k$, $\alpha_{2,1}=0$, $\alpha_{0,2}=0$, $\alpha_{0,3}=k^2+k$, $\alpha_{1,1}=k(k^2-6k+2)$, $\alpha_{1,2}=2k^3-2k^2-3k+1$ болохыг тус тус олно.

$k \geq 3+\sqrt{7}$ үед $\quad k^2+k \geq 0, \quad 4k^2-5k \geq 0, \quad k(k^2-6k+2) \geq 0$

$2k^3-2k^2-3k+1 = (2k+10)(k^2-6k+2)+53k-19 > 0$

биелэх тул өгүүлбэр 1.4.6 ёсоор

$$f = (k^2+k)f_{0,3}^{(6)} + (4k^2-5k)f_{0,4}^{(6)} + k(k^2-6k+2)f_{1,1}^{(6)} + (2k^3-2k^2-3k+1)f_{1,2}^{(6)} \geq 0$$

байна. □

Бодлого 1.4.9. *$k \geq 1$ ба эерэг бодит x, y, z тоонуудын хувьд*

$$xyz\left(\frac{1}{y^3+z^3+kxyz}+\frac{1}{z^3+x^3+kxyz}+\frac{1}{x^3+y^3+kxyz}\right) \geq \frac{3}{2+k}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

Бодолт. Өгөгдсөн тэнцэтгэл биш нь

$$f = (2+k)\sigma_3 \sum (y^3+z^3+kxyz)(z^3+x^3+kxyz) - 3\prod(x^3+y^3+kxyz) \geq 0$$

тэнцэтгэл биштэй эквивалент.

$k \geq 1$ үед

$$\begin{aligned} f =& 3f_{0,4}^{(9)} + 3f_{0,5}^{(9)} + 2(k-1)f_{1,1}^{(9)} + (2k+1)f_{1,2}^{(9)} + (2k+1)f_{1,3}^{(9)} + \\ &+ 2(5k+1)f_{1,4}^{(9)} + 2(k^2-k+3)f_{2,1}^{(9)} + (2k^2+2k-1)f_{2,2}^{(9)} \geq 0 \end{aligned}$$

байна. □

Бодлого 1.4.10. *$k \geq 4$ ба эерэг бодит x, y, z тоонуудын хувьд*

$$xyz\left(\frac{1}{(y+z)^3+kxyz}+\frac{1}{(z+x)^3+kxyz}+\frac{1}{(x+y)^3+kxyz}\right) \leq \frac{3}{8+k}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

Бодолт. Өгөгдсөн тэнцэтгэл биш нь

$$f = 3\prod\left[(x+y)^3 + kxyz\right] - (8+k)\sigma_3\sum\left[(y+z)^3 + kxyz)((z+x)^3 + kxyz)\right] \geq 0$$

тэнцэтгэл биштэй эквивалент.

$k \geq 4$ үед

$$\begin{aligned} f =& 3f_{0,4}^{(9)} + 12f_{0,5}^{(9)} + (2k-8)f_{1,1}^{(9)} + (8k-20)f_{1,2}^{(9)} + (14k+1)f_{1,3}^{(9)} + \\ &+ (34k+56)f_{1,4}^{(9)} + (2k^2+28k-48)f_{2,1}^{(9)} + (5k^2+8k+8)f_{2,2}^{(9)} \geq 0 \end{aligned}$$

байна. □

Бодлого 1.4.11. *Эерэг бодит x, y, z тоонуудын хувьд*

$$3 \leq \sum\frac{y+z-x}{x} \leq \sum\left(\frac{y+z-x}{x}\right)^2 \leq \sum\left(\frac{y+z-x}{x}\right)^3 \leq \sum\left(\frac{y+z-x}{x}\right)^4$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

Бодолт. Дээрх тэнцэтгэл биш нь дараах тэнцэтгэл бишийг батлахтай эквивалент

$$\begin{aligned} f_1 =& yz(y+z-x) + zx(z+x-y) + xy(x+y-z) - 3xyz = f_{0,2}^{(3)} \geq 0 \\ f_2 =& f_{0,3}^{(6)} + 4f_{0,4}^{(6)} + 2f_{1,1}^{(6)} + f_{1,2}^{(6)} \geq 0 \\ f_3 =& f_{0,4}^{(9)} + 4f_{0,5}^{(9)} + f_{1,2}^{(9)} + 2f_{2,1}^{(9)} + f_{2,2}^{(9)} \geq 0 \\ f_4 =& f_{0,5}^{(12)} + 4f_{0,6}^{(12)} + 16f_{0,7}^{(12)} - 11f_{1,4}^{(12)} - 4f_{1,5}^{(12)} + 2f_{2,1}^{(12)} + f_{2,2}^{(12)} + \\ &+ 6f_{2,3}^{(12)} + 4f_{2,4}^{(12)} + 2f_{3,1}^{(12)} + f_{3,2}^{(12)} \geq 0 \end{aligned}$$

Эхний гурван тэнцэтгэл биш биелэх нь тодорхой.

$$\begin{aligned} f_{0,6}^{(12)} - 3f_{1,4}^{(12)} &= \sigma_2 f_{0,3}^{(4)} f_{0,3}^{(6)} \geq 0 \\ f_{0,7}^{(12)} + f_{2,4}^{(12)} - f_{1,5}^{(12)} &= \sum(yz)^4(x-y)^2(x-z)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

тэнцэтгэл бишүүд биелэх тул

$$f_4 \geq 4\left(f_{0,6}^{(12)} - 3f_{1,4}^{(12)}\right) + 4\left(f_{0,7}^{(12)} + f_{2,4}^{(12)} - f_{1,5}^{(12)}\right) \geq 0$$

тэнцэтгэл биш биелнэ. □

Бодлого 1.4.12. *Сөрөг биш бодит x, y, z тоонууд $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ нөхцөлийг хангах бол*

$$1 \leq x + y + z - xyz \leq \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

болохыг харуул.

Бодолт. $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ тул $g = x + y + z - xyz \geq 3\sqrt[3]{xyz} - 3xyz \geq 0$ байна. $g = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_3$ гэж илэрхийлэгдэх ба

$$\begin{aligned} g \geq 1 &\Leftrightarrow (\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)^2 \geq (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^3, \\ &\Leftrightarrow 2\sigma_1^4\sigma_2 - 8\sigma_1^2\sigma_2^2 + 8\sigma_2^3 - 2\sigma_1\sigma_3(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_3^2 \geq 0, \\ &\Leftrightarrow 2f_{0,2}^{(6)} + 2f_{0,3}^{(6)} + 8f_{0,4}^{(6)} + 8f_{1,1}^{(6)} + 12f_{1,2}^{(6)} + 37\sigma_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

болно. $x = 1, y = z = 0$ үед $g = 1$ байна.

Одоо хоёр дахь тэнцэтгэл бишийг батлан харуулъя.

$$\begin{aligned} g \leq \frac{8\sqrt{3}}{9} &\Leftrightarrow 81(\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)^2 \leq 192(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^3, \\ &\Leftrightarrow f = 37f_{0,1}^{(6)} - 17f_{0,2}^{(6)} + 94f_{0,3}^{(6)} + 80f_{0,4}^{(6)} + 117f_{1,1}^{(6)} - 28f_{1,2}^{(6)} \geq 0 \end{aligned}$$

сүүлийн тэнцэтгэл биш биелэхийг харуулах хэрэгтэй.

$$\begin{aligned} f \geq &17(f_{0,1}^{(6)} + f_{1,1}^{(6)} - f_{0,2}^{(6)}) + 28(f_{0,4}^{(6)} + f_{1,1}^{(6)} - f_{1,2}^{(6)}), \\ &f_{0,1}^{(6)} + f_{1,1}^{(6)} - f_{0,2}^{(6)} = \sum x^2(x-y)^2(x-z)^2 \geq 0, \\ &\left(2\sqrt{f_{0,4}^{(6)}f_{1,1}^{(6)}} - f_{1,2}^{(6)}\right)\left(2\sqrt{f_{0,4}^{(6)}f_{1,1}^{(6)}} + f_{1,2}^{(6)}\right) = 4f_{0,4}^{(6)}f_{1,1}^{(6)} - \left(f_{1,2}^{(6)}\right)^2 = \\ &= \sigma_3\left(f_{0,2}^{(3)}f_{0,3}^{(6)} + 3f_{0,4}^{(9)}\right) \geq 0 \Rightarrow \\ &f_{0,4}^{(6)} + f_{1,1}^{(6)} - f_{1,2}^{(6)} \geq 2\sqrt{f_{0,4}^{(6)}f_{1,1}^{(6)}} - f_{1,2}^{(6)} \geq 0 \end{aligned}$$

байх тул $f \geq 0$ буюу $g \leq \frac{8\sqrt{3}}{9}$ болно. $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ үед $g = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ байна. □

Бодлого 1.4.13 (Polya). *$\triangle ABC$ гурвалжны талууд a, b, c бол*

$$S \leq \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{abc}\sqrt[6]{a^2b^2c^2 - (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}}{4}$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж харуул.

Бодолт. $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + y$ гэж орлуулбал дээрх тэнцэтгэл биш

$$f = 27\prod(x+y)^2\left(\prod(x+y)^2 - \prod(x-y)^2\right) - 4096\sigma_1^3\sigma_3^3 \geq 0$$

тэнцэтгэл биштэй эквивалент болно. Иймд

$$\begin{aligned} f = &108f_{0,6}^{(12)} + 432f_{0,7}^{(12)} + 108f_{1,3}^{(12)} + 324f_{1,4}^{(12)} + 2160f_{1,5}^{(12)} + 432f_{2,1}^{(12)} + \\ &+ 2160f_{2,2}^{(12)} + 6372f_{2,3}^{(12)} + 20304f_{2,4}^{(12)} + 16208f_{3,1}^{(12)} + 13856f_{3,2}^{(12)} \geq 0 \end{aligned}$$

тэнцэтгэл биш биелнэ. □

§1.5. Бодлогууд

Бодлого 1.5.1. *Эерэг бодит* a, b, c *тоонуудын хувьд*

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geq a+b+c$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Crux Mathematicorum, Problem 2580, Hojee Lee)

Бодлого 1.5.2. $\triangle ABC$ *гурвалжны талууд нь* a, b, c *ба талбай нь* S *бол*

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

Бодлого 1.5.3. *Эерэг* x, y, z *бодит тоонуудын хувьд*

$$\frac{\sum(y-z)^2}{4k\sum yz}\leq\sum\frac{x}{y+z}-\frac{3}{2}\leq\frac{\sum(y-z)^2}{4k'\sum yz}$$

тэнцэтгэл биш биелэх k *ба* k' *параметрийн эерэг утгын олонлогыг ол.*

Бодлого 1.5.4. *Эерэг бодит* a, b, c *тоонуудын хувьд*

$$\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+\frac{9(a+b+c)^2}{(a^2+b^2+c^2)}\geq 33$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Crux Mathematicorum, Problem 2645, Hojee Lee)

Бодлого 1.5.5. *Эерэг бодит* x, y, z *тоонуудын хувьд*

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\geq 3+\frac{2\left(x^3+y^3+z^3\right)}{xyz}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

Бодлого 1.5.6. *Эерэг бодит* a, b, c *тоонуудын хувьд*

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}\geq\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Carlson's inequality)

Бодлого 1.5.7. *$\triangle ABC$ гурвалжны багтсан тойргийн төвийг I байг. Тэгвэл*

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 \geq \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{3}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Korea 1998)

Бодлого 1.5.8. *Эерэг бодит a, b, c тоонууд $abc = 1$ нөхцөлийг хангах бол*

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Tournament of Towns 1997)

Бодлого 1.5.9. *Эерэг бодит a, b, c тоонуудын хувьд*

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{a(b+c)} + \frac{c^2+a^2-b^2}{b(c+a)} + \frac{a^2+b^2-c^2}{c(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Darij Grinberg)

Бодлого 1.5.10. *Эерэг бодит a, b, c тоонуудын хувьд*

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \geq (ab+bc+ca)^3$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Pham Kim Hung)

Бодлого 1.5.11. *Эерэг бодит a, b, c тоонууд $a+b+c = 1$ нөхцөлийг хангах бол*

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b^2+b} + \frac{b}{c^2+c} + \frac{c}{a^2+a}\right) \geq \frac{3}{4}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Crux Mathematicorum, Problem 3062, Gabriel Dospinescu)

Бодлого 1.5.12. *Эерэг бодит a, b, c тоонуудын хувьд*

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} + \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} \geq \frac{3}{5}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Japan 1997)

Бодлого 1.5.13. *Эерэг бодит a, b, c тоонуудын хувьд*

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(USA 2003)

Бодлого 1.5.14. *Эерэг бодит a, b, c тоонуудын хувьд*

$$\frac{1}{4a^2-ab+4b^2}+\frac{1}{4b^2-bc+4c^2}+\frac{1}{4c^2-ca+4a^2}\geq\frac{9}{7(a^2+b^2+c^2)}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Vasile Cirtoaje)

Бодлого 1.5.15. *Эерэг бодит a, b, c тоонууд $a^2+b^2+c^2=3$ нөхцөлийг хангах бол*

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}$$

болохыг харуул.

(Беларусс, 1999)

Бодлого 1.5.16. *Эерэг бодит x, y, z тоонууд $x^2+y^2+z^2=1$ нөхцөлийг хангах бол*

$$\frac{1}{1-xy}+\frac{1}{1-yz}+\frac{1}{1-zx}\leq\frac{9}{2}$$

болохыг харуул.

(Crux Mathematicorum, Problem 3032, Vasile Cirtoaje)

Бодлого 1.5.17. *$\triangle ABC$ гурвалжны талууд a, b, c ба хагас периметр, багтаасан тойргийн радиус, багтсан тойргийн радиус нь харгалзан p, R, r бол*

$$\left(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\right)^2\leq\left(4+\frac{r}{R}\right)\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж харуул.

Бодлого 1.5.18. *$\triangle ABC$ гурвалжны талууд a, b, c ба A, B, C оройгоос буусан өндрүүд нь харгалзан h_a, h_b, h_c, гадаад багтсан тойргийн радиусууд нь харгалзан r_a, r_b, r_c бол*

$$\frac{r_a^2}{h_b^2+h_c^2}+\frac{r_b^2}{h_c^2+h_a^2}+\frac{r_c^2}{h_a^2+h_b^2}\geq\frac{r_a^2}{h_a^2+h_a^2}+\frac{r_b^2}{h_b^2+h_b^2}+\frac{r_c^2}{h_c^2+h_c^2}$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж харуул.

Номзүй

[1] В.Адъяасүрэн, Б.Санчир., Шурын тэнцэтгэл биш, *А.Нямринчингийн нэрэмжит төвийн бүсийн математикийн олимпиад*, Улаанбаатар, 2010.

[2] Sheng Li CHEN, Fang Jian HUANG., Schur Decomposition for Symmetric Ternary Forms and Readable Proof to Inequalities, *Acta Mathematica Sinica*, Chinese Series, Vol.49, No.3, 2006, 491–502.

[3] Hojoo Lee., Topics in Inequalities, 2005.

[4] Phum Kim Hung., Secrets in Inequalities (Volume 1), GIL publishing House, 2007.