目　次

中等数学

High-School Mathematics

2013 年第 1 期(总第 229 期)

(2013 年 1 月中旬出版)

编辑部主任　李　炘

编辑部电话　022－23766781

发行部电话　022－23542233

E-mail　zdsxlx@163.com

网　　址　zdsx.tjnu.edu.cn

期刊基本参数：CN 12－1121/O1＊1982＊m＊16＊48＊zh＊P＊¥5.00＊10500＊17＊2013－1

数学活动课程讲座

有关正方形共点问题的解题思路

武炳杰
（复旦大学数学科学学院09级,200433）

中图分类号：O123.1　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2013)01－0002－03

（本讲适合初中）

正方形是一个很常见的图形.本文旨在通过一些几何变换和基本图形，针对三角形、四边形各边向外作正方形的问题及多个正方形共顶点的图形做一些分析，尤其针对如何处理中点、垂直及共点的关系，提升处理相关问题的能力.

1　由正方形产生旋转90°的全等三角形

例1　如图1，四边形$ADFC$、四边形$CBEG$均为正方形，M是DE的中点，$MN\perp AB$.证明：N是AB的中点.

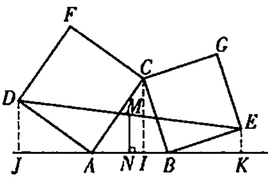


图1

（2004，全国初中数学联赛）

【分析】由正方形的两个对角点向过另一顶点的直线作垂线可以得到两个旋转了90°的全等三角形，利用这个基本图形便可迎刃而解.进一步，可知点M到AB的距离即是AB长度的一半，则M是定点.

证明　如图1，分别过点D、C、E作AB的垂线，垂足分别为J、I、K.

易知，$\triangle DJA\cong\triangle AIC$，$\triangle EKB\cong\triangle BIC$.

所以，$AJ=IC=BK$.

而在直角梯形$DJKE$中，M是DE的中点，且$MN\perp AB$，故MN是中位线.

从而，N是KJ的中点，也是AB的中点.

2　用中位线性质证明线段垂直且相等

当涉及到正方形中心时，旋转90°的全等三角形则需要利用联结各边中点来产生，运用中位线的性质转移直角及等量以达到证明的结论.

首先给出下面一个基本图形.

例2　如图2，在$\triangle ABC$两边AB、AC上分别向外作正方形$ABDE$、正方形$ACFG$.设H、K、M分别是BE、CG、BC的中点.证明：$MH\perp MK$，且$MH=MK$.

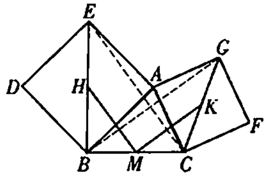


图2

（1991，太原市初中数学竞赛）

证明　如图2，易知$\triangle AEC$逆时针旋转90°便得到了$\triangle ABG$.

所以，$EC\perp BG$，且$EC=BG$.

又H、K、M分别是BE、CG、BC的中点，则

收稿日期：2012－09－12

$MH=\frac{1}{2}EC, MK=\frac{1}{2}BG.$

因此，$MH\perp MK$，且

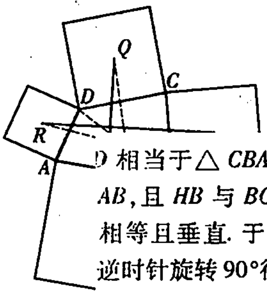
$MH=MK.$

【说明】通过此基本图形可继续考虑四边形各边向外作正方形的中心连线的关系.

例 3　在凸四边形的每一边上向外作正方形. 证明：两组对边上正方形中心的连线相等且垂直.

【分析】这两条线与正方形的边关系不大，直接证明较难. 尝试通过联结 BD，用例 2 作为引理来得到两对垂直且相等的边，从而，构造全等三角形.

证明　如图 3，作出满足条件的图形. 取 BD 的中点 M，联结 MP、MQ、MR、MS.



D 相当于△CBA 逆时针旋 AB，且 HB 与 BC 及另一对相等且垂直. 于是，△BCD 逆时针旋转 90°得到.

BD.

AD.

由例 2 知 MP … BD 的垂心，$KD\perp AB$.

直且相等. 则△QM…

得△PMR.

从而，QS 与 PR 垂直且相等.

【说明】在例 2 的图中取出三角形第三边向外作的正方形中心，可以得到另一对垂直且相等的线段.

例 4　以任意△ABC 的三边 AB、BC、CA 为边分别向外作正方形，中心分别为 E、F、G. 证明：$EG=AF$，且 $EG\perp AF$.

【分析】注意到，正方形的中心其实是对角线的中点，再取 AB 的中点 D 与正方形的中心连线，这产生了很多对全等三角形，慢慢梳理便可得到结论.

证明　如图 4，取 AB 的中点 D.

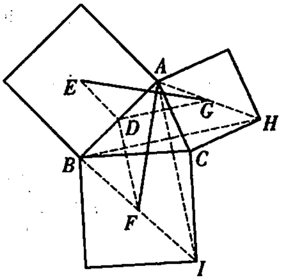


图 4

由例 2 知 DF 与 DG 垂直且相等.

在正方形中，因为 ED 与 DA 垂直且相等，所以，△EDG 顺时针旋转了 90°便可得到△ADF.

从而，AF 与 EG 垂直且相等.

3　利用倍长中线证明线段垂直且相等

有的题目可以考虑用倍长中线来替代中位线转移线段的作用，从而实现构造旋转 90°的三角形的目的.

例 5　已知正方形 $ADCB$、正方形 $AGFE$ 共点于 A，FC 的中点为 H. 证明：$DH=HG$，且 $DH\perp HG$.

【分析】由于 DG 所在的△ADG 由正方形的两条边构成，于是，设法再将一条边长转移到另一个正方形内产生全等三角形.

证明　如图 5，延长 DH 至点 I，使得 $DH=HI$.

联结 DG、GI、IF.

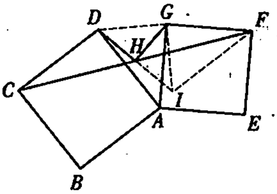


图 5

易知，$DC \mathrel{\underline{\parallel}} IF$，即△$ADG$ 与△FIG 中有两对边相等且垂直. 所以，△ADG 逆时针旋转 90°后可得△FIG.

故△ DGI 为等腰直角三角形，斜边上的中线 HG 垂直且等于斜边的一半 DH.

4　利用基本图形构造三角形的垂心、重心证明三线共点

例 6　在△ ABC 中，以 AC、BC 为边分别向外作正方形 $ACEF$、正方形 $BCGH$，AH 与 BF 交于点 K. 证明：$CK \perp AB$.

证明　如图 6，联结 GE，以△ GCE 作 ▱$GCED$.

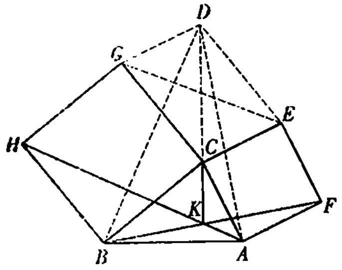


图 6

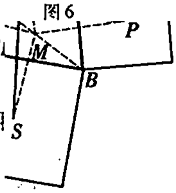


图 3

易知，△ GC

转 90°. 故 $CD \perp$

BA 与 CD 都互相

相当于由△ HBA

因此，$AH \perp$

同理，$BF \perp$

故 K 为△ A和 MQ、MR 和 MS 分别垂

IS 顺时针旋转 90°后便可

所以，D、C、K 三点共线.

从而，$CK \perp AB$.

练　习　题

1. 如图 7，已知正方形 $ABCD$、正方形 $AEFG$ 是共点同向的. 证明：DG、CF、BE 三线共点.

（1988，加拿大数学奥林匹克训练题）

提示：联结 DB. 由基本图形知

$DG \perp BE$.

于是，D、C、B、H 四点共圆.

所以，$\angle DHC = \angle DBC = 45°$.

同理，$\angle EHF = 45°$.

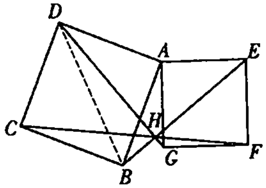


图 7

从而，D、H、G 三点共线.

因此，DG、CF、BE 三线共点.

2. 如图 8，在 Rt △ ABC 中，已知 $\angle ACB = 90°$，$BC = a$，$AC = b$. 以其各边为边向外作正方形，得到一个凸六边形 $DEFGHI$. 则这个六边形的面积 $S =$ ______.

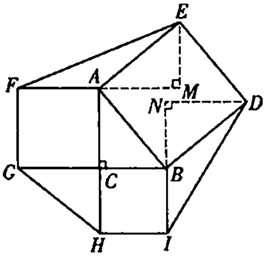


图 8

提示：△ $ABC \cong$ △ $AEM \cong$ △ DBN.

答案：$2a^2 + 2ab + 2b^2$.

3. 六个正方形 A、B、C、D、E、F 如图 9 放置. 若三个正方形 A、B、C 的面积之和为 S_1，三个正方形 D、E、F 的面积之和为 S_2，求 $\frac{S_1}{S_2}$.

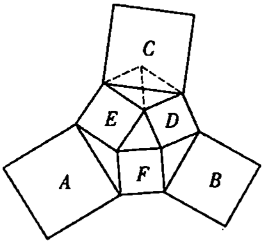


图 9

提示：仿例 6. 通过旋转 90°产生平行四边形，利用边长平方和等于对角线平方和.

答案：3.

一组对边相等的四边形的性质及应用

沈文选
（湖南师范大学数学奥林匹克研究所，410081）

中图分类号：O123.1　文献标识码：A　文章编号：1005-6416(2013)01-0005-005

（本讲适合高中）

一组对边相等的凸、凹、折四边形有如下一系列有趣的结论．本文先将其作为性质介绍，再举出例题．

1　知识介绍

性质 1　在凸或折四边形中，一组对边相等且平行的充分必要条件是该四边形的四个顶点为平行四边形的四个顶点．

性质 2　在凸或折四边形中，一组对边相等且不平行、另一组对边平行的充分必要条件是该四边形的四个顶点为等腰梯形的四个顶点．

性质 3　在四边形（凸、凹、折）中，一组对边相等且不平行的充分必要条件是另一组对边中点的联线与相等两边所在直线成等角．

性质 3 的证明　如图 1，在四边形（凸、凹、折）$ABCD$ 中，AB 与 DC 相等且不平行，M、N 分别为 AD、BC 的中点，直线 MN 分别与直线 BA、CD 交于点 E、F，联结 BD，取 BD 的中点 P.

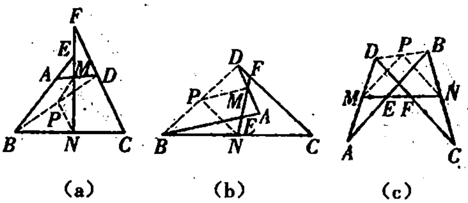


图 1

由中位线定理知

$$MP=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}DC=NP$$

$\Leftrightarrow$ 直线 MN 与直线 BA、CD 成等角．

性质 4　在四边形（凸、凹、折）中，一组对边相等且不平行的充分必要条件是以相等的边各自为弦、另一组对边所在直线的交点（或对角线的交点）为一公共点的相交两圆为等圆．

性质 4 的证明　因为两弦所对的圆周角相等，所以，由正弦定理即证．

收稿日期：2012-10-19　修回日期：2012-11-12

---

4. 如图 10，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=90°$，$\angle A$ 的平分线为 AD，以 AB、AC 为边向外作正方形，中心分别为 E、F. 证明：AD、BF、CE 三线共点．

提示：仿例 6. 将两个三角形旋转 90°，可证这三条线段恰是拼成的 $\triangle EFG$ 的三条高，所以，共点于垂心．

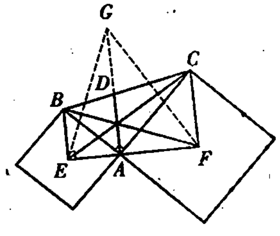
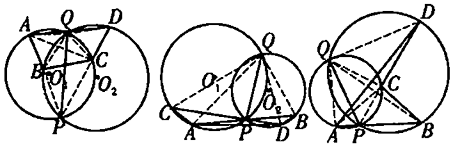


图 10

性质5　在四边形(凸、凹、折)中,一组对边相等且不平行的充分必要条件是以相等的两边为割线段(端点在不同的圆上),以这两条边所在直线的交点为一公共点的相交两圆的公共弦平分这相等两边所在直线的夹角.

性质5的证明　如图2,两圆$\odot O_1$、$\odot O_2$交于P、Q两点,点A、C在$\odot O_1$上,点B、D在$\odot O_2$上,AB与DC交于点P. 联结QA、QB、QC、QD.



(a)　(b)　(c)

图2

由$\angle QAB=\angle QDC$(或$\angle QCD$),

$\angle QBA=\angle QCD$(或$\angle QDC$),

知$\triangle QAB\backsim\triangle QCD$(或$\triangle QDC$).

则$AB=CD\Leftrightarrow\triangle QAB\cong\triangle QCD$

$\Leftrightarrow QA=QC\Leftrightarrow\angle QAC=\angle QCA$

$\Leftrightarrow\angle QPC=\angle QAC=\angle QCA=\angle QPB$

$\Leftrightarrow QP$与直线AB、CD成等角.

性质6　折四边形相交两边相等且不垂直(或凸四边形对角线相等且不垂直)的充分必要条件是以另一组对边或两对角线(或一组对边)各自为弦、相交两边(或对角线)的交点为一个公共点的两圆的另一个交点在以相交两边(或对角线)各自为直径的两圆的公共弦上.

性质6的证明　如图3,在折四边形$ABCD$中,AB与CD交于点G,$\triangle ADG$的外接圆与$\triangle BCG$的外接圆的另一个交点为X. 设M、N分别为AB、CD的中点,$\odot M$与$\odot N$交于P、Q两点,即直线PQ为这两圆的等幂轴.

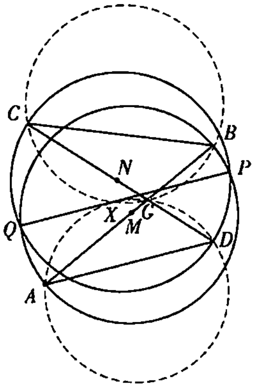


图3

注意到,同弧上的圆周角相等.

则$\angle XAG=\angle XDG$,

$\angle XBG=\angle XCG$.

故$\triangle XAB\backsim\triangle XDC$.

此时,XM、XN分别为这两个三角形的中线,从而,

$\frac{XM}{AM}=\frac{XN}{DN}=k$,

其中,AM、DN分别为$\odot M$、$\odot N$的半径.

显然,$k\neq1$,否则与题设不符.

于是,点X位于PQ上,即

点X对$\odot M$、$\odot N$的幂相等

$\Leftrightarrow AM^2-XM^2=DN^2-XN^2$

$\Leftrightarrow(1-k^2)AM=(1-k^2)DN$

$\Leftrightarrow AM=DN$

$\Leftrightarrow AB=CD$.

2　应用

例1　两圆Γ_1、Γ_2交于点A、B,过点B的一条直线分别与圆Γ_1、Γ_2交于点C、D,过点B的另一条直线分别与圆Γ_1、Γ_2交于点E、F,直线CF分别与圆Γ_1、Γ_2交于点P、Q. 设M、N分别是弧$\overparen{PB}$、$\overparen{QB}$的中点. 若$CD=$

EF,证明:C、F、M、N 四点共圆.

(2010,中国数学奥林匹克)

证明　如图 4,联结 ED.

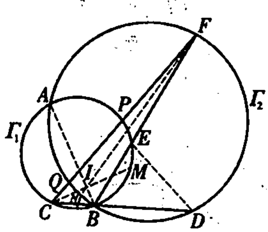


图 4

在凹四边形 $CDEF$ 中,应用性质 5,知 AB 平分 $\angle CBF$.

由 M、N 分别是弧 $\overset{\frown}{PB}$、$\overset{\frown}{QB}$ 的中点,知 CM、FN 分别平分 $\angle BCF$、$\angle BFC$.

故 AB、CM、FN 共点于 $\triangle BCF$ 的内心 I.

从而,在圆 Γ_1、Γ_2 中,由相交弦定理有

$CI \cdot IM = AI \cdot IB = NI \cdot IF$.

于是,由相交弦定理的逆定理,知 C、F、M、N 四点共圆.

例 2　给定凸四边形 $ABCD$,$BC = AD$,且 BC 不平行于 AD. 设点 E、F 分别在边 BC、AD 的内部,满足 $BE = DF$,直线 AC 与 BD 交于点 P,EF 与 BD 交于点 Q,直线 EF 与 AC 交于点 R. 证明:当点 E、F 变动时,$\triangle PQR$ 的外接圆经过除点 P 外的另一个定点. [1]

(第 46 届 IMO)

证明　如图 5.

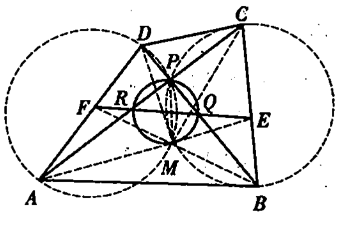


图 5

由 BC 与 AD 不平行,知 $\triangle APD$ 的外接圆与 $\triangle PBC$ 的外接圆除交于点 P 外,必交于另一点 M,则 M 为定点.

由 $BC = AD$,应用性质 4,知 $\triangle APD$ 的外接圆与 $\triangle PBC$ 的外接圆为等圆.

联结 MA、MF、MD、MP、MC、ME、MB.

由 $\angle DAM = \angle BPM = \angle BCM$,知

$DM = BM$.

同理,$AM = MC$.

注意到,$DF = BE$,则 $\triangle FDM \cong \triangle EBM$.

所以,$MF = ME$,且 $\angle FMD = \angle EMB$.

同理,$\angle FMA = \angle EMC$.

于是,$\angle EMF = \angle BMD = \angle CMA$,即等腰 $\triangle MEF$、等腰 $\triangle MBD$、等腰 $\triangle MCA$ 的顶角相等. 从而,其底角也相等,有

$\angle MEF = \angle MBD = \angle MCA$.

因此,M、B、E、Q 及 M、E、C、R 分别四点共圆.

于是,$\angle MQB = \angle MEB = \angle MRP$.

从而,Q、P、R、M 四点共圆.

例 3　圆心为 O_1、O_2 的两个等圆交于 P、Q 两点,O 是公共弦 PQ 的中点,过 P 任作两条割线 AB、CD(AB、CD 均不与 PQ 重合),点 A、C 在 $\odot O_1$ 上,点 B、D 在 $\odot O_2$ 上,联结 AD、BC,M、N 分别为 AD、BC 的中点. 已知点 O_1、O_2 不在两圆的公共部分内,点 M、N 均不与 O 重合. 证明:M、N、O 三点共线. [2]

证明　如图 6,联结 AC、BD、O_1A、O_1C、O_2D、O_2B.

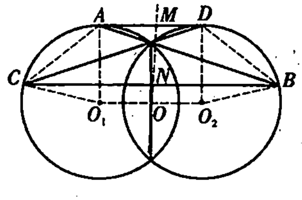


图 6

由 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 为等圆知

$CO_1 = O_2B$,$AO_1 = DO_2$.

应用性质 4,知 $AC = DB$.

分别在四边形 $ACBD$、四边形 O_1O_2BC、

四边形 O_1O_2DA 中应用性质3，知直线 MN 与 AC、DB 成等角，直线 ON 与 O_1C、O_2B 成等角，直线 OM 与 O_1A、O_2D 成等角.

注意到，同时与两相交(或平行)直线成等角的直线是相互平行的.

从而，MN、ON、OM 三直线重合.

故 M、N、O 三点共线.

例4 在锐角$\triangle APD$ 的边 AP、PD 上各取一点 B、C，四边形 $ABCD$ 的两条对角线交于点 Q，$\triangle APD$、$\triangle BPC$ 的垂心分别为 H_1、H_2. 证明：若 H_1H_2 经过$\triangle ABQ$ 的外接圆和$\triangle CDQ$ 的外接圆的交点 X，则它必定经过$\triangle BQC$ 的外接圆和$\triangle AQD$ 的外接圆的交点 Y(点 X 与 Q 不重合，Y 与 Q 不重合).

(第29届俄罗斯数学奥林匹克)

证明 如图7.

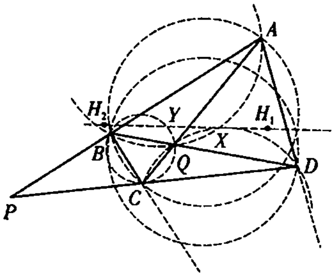


图7

由点 X、Y 均与 Q 不重合，知 AD 与 BC 必相交，设交于点 R. 则在完全四边形 $ABPCRD$ 中，注意到，以完全四边形的三条对角线为直径的圆共轴，且完全四边形的四个三角形的垂心在这条根轴上[3]，即知点 H_1、H_2 均在以 AC、BD 为直径的两相交圆的公共弦所在的直线上.

应用性质6，即知点 X 也在这条公共弦所在的直线上时，这两个圆为等圆；又应用性质6，即知点 Y 在这条公共弦所在的直线上.

例5 锐角$\triangle ABC$ 的外接圆在点 A、B 处的切线交于点 D，M 是 AB 的中点. 证明：

$\angle ACM=\angle BCD$.[4]

(2007，IMO 中国国家队培训题)

证明 如图8，过点 A 作与 BC 切于点 C 的$\odot O_1$，$\odot O_1$ 与 CD 交于点 Q. 联结 AQ 并延长与$\odot O_2$ 交于点 E，联结 BQ 并延长与$\odot O_1$ 交于点 F，联结 CF、CE.

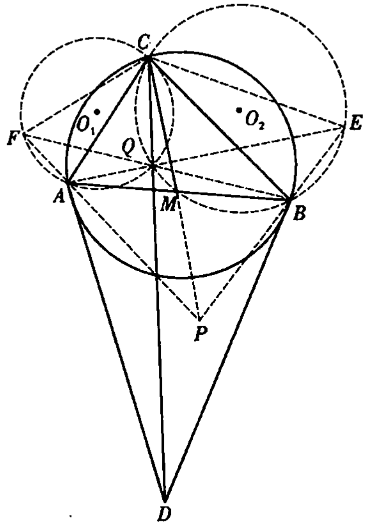


图8

则$\angle AQD=\angle AFC=\angle ACB=\angle ABD$.

于是，A、D、B、Q 四点共圆.

注意到，$DA=DB$，则$\angle AQD=\angle DQB$.

从而，$\angle AQC=\angle CQB$. ①

又$\angle QAC=\angle QCB$，则

$\angle ACQ=\angle CBQ$.

这说明，过点 B、Q、C 的圆(即$\odot O_2$)与 AC 切于点 C.

延长 CM 至点 P，使 $MP=CM$，则四边形 $CAPB$ 为平行四边形.

注意到式①，应用性质5，即知

$AE=FB$.

此时，$CF=CA$，$CE=CB$.

故$\angle CBE=\angle CEB=\angle BCA$

$=180°-\angle CBP$，

即知 E、B、P 三点共线.

同理，F、A、P 三点共线，又可推证

$\angle ACF=\angle BCE$.

在等腰梯形 $CFPB$ 中，

$\angle FCM=\angle FBP=\angle QCE$.

故 $\angle ACM=\angle FCM-\angle FCA$

$=\angle QCE-\angle BCE=\angle BCQ=\angle BCD$.

【注】此例应用调和四边形性质可简捷推证.

例 6 已知 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 内的旁切圆与 CA 切于点 D，$\angle C$ 内的旁切圆与 AB 切于点 E，M、N 分别为 BC、DE 的中点. 证明：MN 平分 $\triangle ABC$ 的周长，且与 $\angle A$ 的平分线平行.

（第 21 届世界城市（冬季）数学竞赛）

证明 如图 9，设 MN 分别与 AC、AB 交于点 G、F，L 为 GF 的中点.

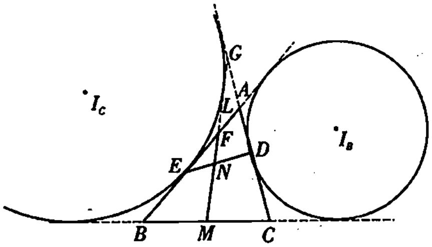


图 9

由题设知 D、E 分别为旁切圆 $\odot I_B$、$\odot I_C$ 的切点. 则

$$EB=\frac{1}{2}(AB+CA-BC)=DC.$$

于是，由性质 3 知

$\angle BFM=\angle MGC$

$\Rightarrow AF=AG$，且 ML 与 $\angle A$ 的平分线平行.

又由性质 3 知 $BF=CG$，即

$BM+BF=CG+MC=AF+AC+MC$.

从而，MN 平分 $\triangle ABC$ 的周长.

练 习 题

1. 在凸四边形中，已知经过一组对边中点的直线同两条对角线所成的角相等. 证明：这两条对角线相等.

提示：应用性质 3.

2. 已知 AH 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的平分线，在边 AB、AC 上截取 $BD=CE$，M 是 DE 的中点，N 是 BC 的中点. 证明：$MN\parallel AH$.

提示：应用性质 3.

3. 在等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$. 假如

（1）M 是边 BC 的中点，O 是直线 AM 上的点，且 $OB\perp AB$；

（2）Q 是边 BC 上不同于 B、C 的任意点；

（3）点 E 在直线 AB 上，点 F 在直线 AC 上，使得 E、Q、F 是不同的三个共线点.

证明：$OQ\perp EF$ 当且仅当 $QE=QF$.

（第 35 届 IMO）

提示：$OQ\perp EF$，$OB\perp AB$

$\Leftrightarrow B$、E、O、Q 四点共圆

$\Leftrightarrow \angle OEQ=\angle OBC=\angle OAC$

$\Leftrightarrow A$、E、O、F 四点共圆

$\Leftrightarrow \angle OFC=\angle AEO=\angle OQC$

$\Leftrightarrow O$、Q、F、C 四点共圆.

对 $\triangle AEF$ 及截线 BQC 应用梅涅劳斯定理得

$$\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EQ}{QF}\cdot\frac{FC}{CA}=1\Rightarrow\frac{EQ}{QF}=\frac{BE}{FC}.$$

故 $QE=QF\Leftrightarrow BE=FC$

$\Leftrightarrow$ 四边形 $BEOQ$ 的外接圆与四边形 $QOCF$ 的外接圆相等（直径均为 d）

$\Leftrightarrow d\sin\angle OEQ=OQ=d\sin\angle OFQ$

$\Leftrightarrow \angle OEQ=\angle OFQ$

$\Leftrightarrow OQ\perp EF$.

参考文献：

[1] 裘宗沪 冷岗松. 国际数学奥林匹克试题解答[M]. 北京：开明出版社，2006.

[2] 国家集训队教练组. 数学奥林匹克试题集锦（2004）[M]. 上海：华东师范大学出版社，2004.

[3] 沈文选. 完全四边形的优美性质[J]. 中等数学，2006（8）.

[4] 国家集训队教练组. 数学奥林匹克试题集锦（2007）[M]. 上海：华东师范大学出版社，2007.

命题与解题

用特殊换元解一类三元不等式

张伟军 黄生汉
（上海市闵行区第二中学，200240） （湖南省绥宁县第一中学，422600）

中图分类号：O122.3 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2013)01－0010－02

常见约束条件是：$a、b、c\in\mathbf{R}_+$，

$$a+b+c=k, \quad ①$$

证明关于 $a、b、c$ 的三元不等式.

在△ABC 中，

$$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}=1. \quad ②$$

由式①、②自然产生换元

$$a=\frac{k}{xy},b=\frac{k}{yz},c=\frac{k}{zx}, \quad ③$$

其中，$x=\cot\frac{A}{2},y=\cot\frac{B}{2},z=\cot\frac{C}{2}$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 是△ABC 的三个内角.

将变换③代入式①得

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1,$$

即 $x+y+z=xyz.$ ④

式④关于 $x、y、z$ 具有升幂降幂的功能，用处很大. 换元③的好处是将关于 $a、b、c$ 的三元不等式转化为关于 $x、y、z$ 的三元不等式，解决了对题目入手难的困难. 证明的关键是结合等式 $x+y+z=xyz$ 作恒等变形.

例1 设正实数 $a、b、c$ 满足 $a+b+c=1$. 证明：

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leqslant2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right). \quad ⑤$$

（2004，日本数学奥林匹克）

收稿日期：2012－05－31

证明 应用换元③知，

式⑤

$$\Leftrightarrow 3+\frac{2z}{x+y}+\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}\leqslant2\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x}-\frac{y}{z+x}+\frac{z}{y}-\frac{z}{x+y}+\frac{x}{z}-\frac{x}{y+z}\geqslant\frac{3}{2}.$$

上式左边

$$=\frac{yz}{x(z+x)}+\frac{zx}{y(x+y)}+\frac{xy}{z(y+z)}$$

$$=\frac{y^2z^2}{xyz(z+x)}+\frac{z^2x^2}{xyz(x+y)}+\frac{x^2y^2}{xyz(y+z)}$$

$$\geqslant\frac{1}{xyz}\cdot\frac{(xy+zx+yz)^2}{2(x+y+z)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{xy+yz+zx}{xyz}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)^2\geqslant\frac{3}{2}.$$

故式⑤成立，且当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时，上式等号成立.

【注】原不等式是代数型，换元③将其转化成△ABC 中的不等式

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}.$$

例2 设 $a、b、c\in\mathbf{R}_+$，$a+b+c=1$. 证明：

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\leqslant\frac{27}{10}.$$

证明 应用换元③知

$$\frac{1}{1+b^2}=\frac{y^2z^2}{y^2z^2+1}=1-\frac{1}{y^2z^2}.$$

同理，$\frac{1}{1+a^2}=1-\frac{1}{x^2y^2},\frac{1}{1+c^2}=1-\frac{1}{z^2x^2}$.

故原不等式

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2y^2+1}+\frac{1}{y^2z^2+1}+\frac{1}{z^2x^2+1}\geqslant\frac{3}{10}$$

$$\Leftrightarrow 27+17(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+7(x^4y^2z^2+x^2y^4z^2+x^2y^2z^4)\geqslant 3x^4y^4z^4$$

$$\Leftrightarrow 27+17(xy+yz+zx)^2-34x^2y^2z^2+4x^4y^4z^4-14x^2y^2z^2(xy+yz+zx)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 17\left(\frac{1}{\sqrt{27}}x^2y^2z^2-\sqrt{27}\right)^2+\frac{14}{6}[x^2y^2z^2-3(xy+yz+xz)]^2+4\left[\frac{1}{9}x^4y^4z^4-(xy+yz+zx)^2\right]+16\left(\frac{1}{27}x^4y^4z^4-27\right)\geqslant 0.$$

上式显然成立. 当 $x=y=z=\sqrt{3}$ 时，不等式中的等号成立.

【注】将所证的不等式配成代数和非负是证明不等式的一种策略.

例 3 设正实数 a、b、c 满足 $a+b+c=3$. 证明：

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant a^2+b^2+c^2.$$

证明 应用换元③可将不等式变成

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geqslant 81\left(\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{y^2z^2}+\frac{1}{z^2x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\geqslant 81(x^4y^2z^2+x^2y^4z^2+x^2y^2z^4)$$

$$\Leftrightarrow 13(x^4y^2z^2+x^2y^4z^2+x^2y^2z^4)+\sum[x^6(y^2+z^2)+20x^3y^3z^2+4x^5yz(y+z)+4x^5(y^3+z^3)+6x^4y^4+12x^4yz(y^2+z^2)]\geqslant 81(x^4y^2z^2+x^2y^4z^2+x^2y^2z^4),$$

其中，“$\sum$”表示轮换对称和.

当 $a=b=c=1$ 时，不等式等号成立.

例 4 设 a、b、c 是满足 $a+b+c=1$ 的非负数. 证明：

$$0\leqslant ab+bc+ca-2abc\leqslant\frac{7}{27}. \quad ⑥$$

(第 25 届 IMO)

证明 式⑥左边不等式显然成立，且当 a、b、c 三个数中有零时，不等式⑥显然成立.

下面设 $a>0,b>0,c>0$.

应用换元③，式⑥右边变形为

$$\frac{1}{xy^2z}+\frac{1}{xyz^2}+\frac{1}{x^2yz}-2\cdot\frac{1}{x^2y^2z^2}\leqslant\frac{7}{27}$$

$$\Leftrightarrow 13(xy+yz+zx)-54\leqslant 7(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow 13\left(\sum xy\right)\sum x-54xyz\leqslant 7\left(\sum x^2\right)\sum x$$

$$\Leftrightarrow 6\sum x^2(y+z)\leqslant 7\sum x^3+15xyz.$$

由舒尔不等式及均值不等式知上式成立. 当 $x=y=z=\sqrt{3}$ 时，不等式中等号成立.

顺便指出，利用换元③也可解复杂的不等式问题.

例 5 设正实数 a、b、c 满足

$$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\leqslant 4.$$

证明：$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\geqslant 3.$

(2011，美国数学奥林匹克)

证明 题设不等式变形为

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\leqslant 4.$$

应用换元③得

$$a+b=\frac{r}{\sqrt{xy}},b+c=\frac{r}{\sqrt{yz}},c+a=\frac{r}{\sqrt{zx}},$$

其中，$0<r\leqslant 2,x=\cot\frac{A}{2},y=\cot\frac{B}{2},c=\cot\frac{C}{2}$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 为 $\triangle ABC$ 的三个内角.

则 $a+b+c=\frac{r}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)$.

于是，$a=\frac{r}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}-\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)$,

$b=\frac{r}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}-\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)$,

赛题新解

一道国外竞赛题的两种新证法

黄全福

（安徽省安庆市怀宁县江镇中学，246142）

中图分类号：O123.1　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2013)01－0012－02

题目　在凸四边形 $ABCD$ 中，已知

$$\angle ADB+\angle ACB=\angle CAB+\angle DBA=30^\circ,$$

且 $AD=BC$.

证明：线段 DB、CA、DC 可以围成一个直角三角形.[1]

（第9届丝绸之路数学竞赛(2010)）

这是一道构思巧妙、有一定难度的平面几何题，笔者给出两种不同于文[1]的证法.

证法1　如图1，作正 $\triangle ABH$，联结 CH 与 DB 交于点 E，DH 与 CA 交于点 F.

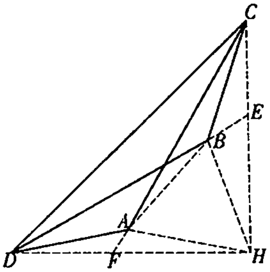


图1

为方便，记

$\angle ACB=\alpha$，$\angle ADB=\beta$，

$\angle CAB=x$，$\angle DBA=y$.

则 $\angle CBH=\angle CBE+\angle EBH$

$=(30^\circ+\alpha)+(120^\circ-y)$

$=150^\circ+\alpha-y$，

$\angle DAB=x+150^\circ-\beta$.

又 $x+y=30^\circ=\alpha+\beta\Rightarrow\alpha-y=x-\beta$，故 $\angle CBH=\angle DAB$.

结合 $CB=DA$，$BH=AB$，于是，

$\triangle CBH\cong\triangle DAB$

$\Rightarrow CH=DB$，$\angle BHC=\angle ABD=y$.

同理，$DH=CA$，$\angle AHD=\angle BAC=x$.

故 $\angle CHD=\angle AHB+\angle AHD+\angle BHC$

$=60^\circ+x+y=90^\circ$.

从而，$DC^2=CH^2+DH^2=DB^2+CA^2$，即由线段 DB、CA、DC 能围成一个直角三角形.

收稿日期：2012－05－24

$$c=\frac{r}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right),$$

$$ab+1=\frac{1}{4}\left[\frac{r^2}{xy}-\left(\frac{r}{\sqrt{yz}}-\frac{r}{\sqrt{zx}}\right)^2+4\right]$$

$$\geqslant\frac{1}{4}\left(\frac{r^2}{xy}-\frac{r^2}{yz}-\frac{r^2}{zx}+2\cdot\frac{r^2}{z\sqrt{xy}}+\frac{r^2}{xy}+\frac{r^2}{yz}+\frac{r^2}{zx}\right)$$

$$=\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{z\sqrt{xy}}\right).$$

故 $\dfrac{ab+1}{(a+b)^2}+\dfrac{bc+1}{(b+c)^2}+\dfrac{ca+1}{(c+a)^2}$

$$\geqslant\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{xy}}{z}+\frac{\sqrt{yz}}{x}+\frac{\sqrt{zx}}{y}\right)$$

$$\geqslant\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3.$$

当 $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 时，不等式等号成立.

仔细观察图 1,对照已知条件不难发现,此题隐含了一个重要条件:$AB=AD=BC$.

事实上,若 $AB<AD$,则 $AB<BC$. 此时,

$\angle ADB+\angle ACB<\angle CAB+\angle DBA$,

与已知矛盾.

若 $AB>AD$,同样导出矛盾.

证法 2 如图 2,设 AC 与 BD 交于点 P.

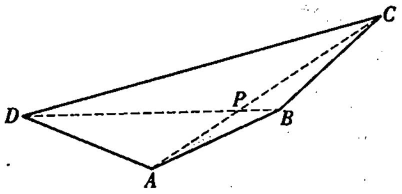


图 2

易知,$\angle APD=30°$,$\angle DPC=150°$.

令 $AB=AD=BC=1$,

$\angle ACB=\angle CAB=\alpha$,

$\angle ADB=\angle DBA=\beta$.

由 $\begin{cases}\alpha+\beta=30°,\\(30°+\alpha)+(30°+\beta)=90°\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\sin^2(30°+\alpha)+\sin^2(30°+\beta)=1,\\\cos(30°+\alpha+30°+\beta)=\cos 90°=0.\end{cases}$

由等腰$\triangle ABD$、等腰$\triangle BAC$ 易得

$AC=2\cos\alpha, DB=2\cos\beta$.

则 $AC^2+DB^2=4(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)$

$=2[(1+\cos 2\alpha)+(1+\cos 2\beta)]$

$=4+4\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$

$=4+2\sqrt{3}\cos(\alpha-\beta)$. ①

观察$\triangle APD$ 知

$$\frac{PD}{\sin(150°-\beta)}=\frac{AD}{\sin\angle APD}=\frac{1}{\sin 30°}=2$$

$\Rightarrow PD=2\sin(150°-\beta)=2\sin(30°+\beta)$.

同理,$PC=2\sin(30°+\alpha)$.

在$\triangle PDC$ 中利用余弦定理得

$DC^2=PC^2+PD^2-2PC\cdot PD\cos\angle DPC$

$=4[\sin^2(30°+\alpha)+\sin^2(30°+\beta)]+$

$4\sqrt{3}\sin(30°+\alpha)\cdot\sin(30°+\beta)$

$=4+4\sqrt{3}\left\{-\frac{1}{2}[\cos(30°+\alpha+30°+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]\right\}$

$=4+2\sqrt{3}\cos(\alpha-\beta)$. ②

比较式①、②得 $AC^2+DB^2=DC^2$.

因此,由线段 DB、CA、DC 能围成一个直角三角形.

参考文献:

[1] 王 琪 题目翻译并解答.第 9 届丝绸之路数学竞赛(2010)[J].中等数学.2011(增刊).

另解一道中国国家集训队选拔考试题

万喜人
（湖南图书馆培训楼万喜学校，410011）

中图分类号：O123.1 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2013)01－0014－01

题目 如图1，在锐角$\triangle ABC$中，已知$\angle A>60°$，H为$\triangle ABC$的垂心，点M、N分别在边AB、AC上，$\angle HMB=\angle HNC=60°$，$O$为$\triangle HMN$的外心，点$D$与$A$在直线$BC$的同侧，使得$\triangle DBC$为正三角形. 证明：$H$、$O$、$D$三点共线.[1]

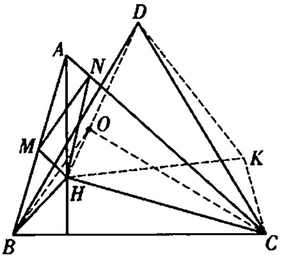


图1

（2012，中国国家集训队选拔考试）

本文介绍两种证法.

证法1 如图1，联结HO、HD. 易知

D、O、H三点共线$\Leftrightarrow \angle BHO=\angle BHD$，

且 $\angle BHO=\angle BHM+\angle MHO$

$=180°-\angle BMH-\angle MBH+(90°-\angle MNH)$

$=180°-60°-(90°-\angle BAC)+90°-\angle MNH$

$=\angle BAC+120°-\angle MNH$

$=\angle BAC+\angle ANM=\angle BMN.$

而$\triangle DBC$为正三角形，则可把$\triangle DBH$绕点D逆时针旋转$60°$至$\triangle DCK$位置，联结HK. 显然，$\triangle DHK$是正三角形.

由$\angle BMH=\angle CNH$，$\angle MBH=\angle NCH$

$\Rightarrow \triangle MBH\backsim\triangle NCH$

$\Rightarrow \frac{HM}{HN}=\frac{HB}{HC}=\frac{CK}{CH}.$

又$\angle MHN=120°-\angle BAC=\angle KCH$，

则$\triangle HMN\backsim\triangle CKH$

$\Rightarrow \angle CKH=\angle HMN$

$\Rightarrow \angle BHD=\angle CKD=60°+\angle HMN=\angle BMN$

$\Rightarrow \angle BHO=\angle BHD.$

证法2 如图1，联结OB、OC.

故D、O、H三点共线

$\Leftrightarrow \frac{S_{\triangle BDH}}{S_{\triangle CDH}}=\frac{S_{\triangle BOH}}{S_{\triangle COH}}$

$\Leftrightarrow \frac{BD\cdot BH\sin\angle DBH}{CD\cdot CH\sin\angle DCH}=\frac{OH\cdot BH\sin\angle BHO}{OH\cdot CH\sin\angle CHO}$

$\Leftrightarrow \frac{\sin\angle DBH}{\sin\angle DCH}=\frac{\sin\angle BHO}{\sin\angle CHO}.$ ①

由证法1得

$\angle BHO=\angle BMN=180°-\angle AMN.$

同理，$\angle CHO=\angle CNM=180°-\angle ANM.$

所以，$\frac{\sin\angle BHO}{\sin\angle CHO}=\frac{\sin\angle AMN}{\sin\angle ANM}=\frac{AN}{AM}.$

又$\angle AHN=\angle CNH-\angle CAH$

$=\angle DBC-\angle CBH=\angle DBH.$

同理，$\angle AHM=\angle DCH.$

则$\frac{\sin\angle DBH}{\sin\angle DCH}=\frac{\sin\angle AHN}{\sin\angle AHM}$

$=\frac{AN}{AM}=\frac{\sin\angle BHO}{\sin\angle CHO}.$

从而，式①成立，进而命题得证.

收稿日期：2012－05－15

参考文献：

[1] 2012中国国家集训队选拔考试[J]. 中等数学，2012(7).

一道数学奥林匹克题的另解

冯有兵

（江西师范大学附属中学，330046）

中图分类号：O157.1　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2013)01－0015－01

题目　设 m 是正整数，$n=2^m-1$，数轴上 n 个点所成的集合为 $P_n=\{1,2,\cdots,n\}$.

一只蚱蜢在这些点上跳跃，每步从一个点跳到与之相邻的点. 求 m 的最大值，使得对任意 x、$y\in P_n$，从点 x 跳 2 012 步到点 y 的跳法种数为偶数（允许中途经过点 x、y）. [1]

（第九届中国东南地区数学奥林匹克）

解　首先，若 $m\geqslant 11$，则存在两点 1 与 2 013，两者仅有 1 种跳法，故 $m\leqslant 10$.

其次说明当 $m=10$ 时，对任意 x、$y\in P_{10}$，从 x 到 y 的跳法种数为偶数.

如图 1，记 $A(0,x)$，$B(2\,012,y)$ $(x<y)$.

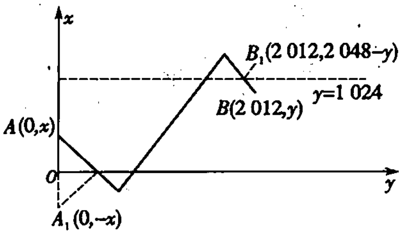


图 1

则由点 $x\rightarrow y$ 的跳法数等于从 $A\rightarrow B$ 的折线数

$$S_1=\mathrm{C}_{2\,012}^{\frac{1}{2}[2\,012-(y-x)]}=\mathrm{C}_{2\,012}^{\frac{1}{2}[2\,012+(y-x)]}.$$

但注意到，此时折线可能与 $y=0$ 及 $y=1\,024$ 相交.

与 $y=0$ 相交的情形与点 $A_1(0,-x)$ 到 $B(2\,012,y)$ 的折线数构成一一对应（将折线与 $y=0$ 的第一个交点前段作关于 $y=0$ 的对称），故 $S_2=\mathrm{C}_{2\,012}^{\frac{1}{2}[2\,012-(y+x)]}$.

同理，与 $y=1\,024$ 相交的情形数为

$$S_3=\mathrm{C}_{2\,012}^{\frac{1}{2}\{2\,012-[2\times1\,024-(x+y)]\}}=\mathrm{C}_{2\,012}^{\frac{1}{2}[2\,012+(x+y)-2\,048]}.$$

但此时还应除去重复计数的与 $y=0$，$y=1\,024$ 均相交的折线数.

注意到，与两直线均相交的折线只能先与 $y=0$ 相交，再与 $y=1\,024$ 相交，否则，若其先与 $y=1\,024$ 相交，有

折线长度 $>2\times1\,024>2\,012$，

矛盾.

故均相交的情形与

$$A_1(0,-x)\rightarrow B_1(2\,012,2\,048-y)$$

的折线构成一一对应，

$$S_4=\mathrm{C}_{2\,012}^{\frac{1}{2}[2\,012-(2\,048-y+x)]}.$$

因此，符合条件的跳法总数为

$$S=S_1-S_2-S_3+S_4.$$

下面说明 $S_1\equiv S_4\pmod 2$，$S_2\equiv S_3\pmod 2$.

注意到，S_1、S_4 的组合数上标相差 1 024. 于是，只需说明

$$\mathrm{C}_{2\,012}^{k}\equiv\mathrm{C}_{2\,012}^{k+1\,024}\pmod 2\ (k<1\,006),$$

即 $$\frac{2\,012!}{k!\cdot(2\,012-k)!}\equiv\frac{2\,012!}{(k+1\,024)!\cdot(2\,012-k-1\,024)!}\pmod 2.$$

这仅需

$k!\cdot(2\,012-k)!$ 与 $\cdot(2\,012-k-1\,024)!$

中的 2 的幂次相等，即

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{k}{2^i}\right]+\left[\frac{2\,012-k}{2^i}\right]\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{k+1\,024}{2^i}\right]+\left[\frac{2\,012-k-1\,024}{2^i}\right]\right),\quad ①$$

其中，$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

易知，当 $i\geqslant 11$ 时，后面的和式均为 0，故式①等价于

收稿日期：2012－09－26

一道数学竞赛题的另解

查晓东　　阮宇平
（江苏省天一中学，214101）　（江苏省天一中学高二(3)班，214101）

中图分类号：O156.1　文献标识码：A　文章编号：1005-6416(2013)01-0016-01

笔者在文[1]中看到一个赛题的解答，感觉其技巧性太强，不容易想到.学生阮宇平给了笔者一个新的思路，经过思考给出如下解答.

题目　证明：对于每个质数 p，存在无穷多个四元数组 (x,y,z,t)（$x、y、z、t$ 为互不相等的正整数），使得

$$(x^2+pt^2)(y^2+pt^2)(z^2+pt^2)$$

为完全平方数.[1]

（第8届丝绸之路数学竞赛(2009)）

证明　若 (x_0,y_0,z_0,t_0) 是满足条件的一个四元数组，则 $(k^2x_0,k^2y_0,k^2z_0,k^2t_0)(k\in\mathbf{N}_+)$ 显然也是.

故只需证对任意的质数 p，

$$(x^2+pt^2)(y^2+pt^2)(z^2+pt^2)=n^2(n\in\mathbf{Z})$$

有正整数解.

接下来证明：对任意的质数 p，$u^2+pt^2=v^2$ 至少有三组不同的正整数解.

(1) $p=2$.

取 $t=6$，得 $(v-u)(v+u)=72$.

则 $\begin{cases}u=17,\\v=19;\end{cases}\begin{cases}u=7,\\v=11;\end{cases}\begin{cases}u=3,\\v=9.\end{cases}$

故 $(x_0,y_0,z_0,t_0)=(17,7,3,6)$ 满足题设.

(2) $p=3$.

取 $t=12$，得 $(v-u)(v+u)=432$.

则 $\begin{cases}u=107,\\v=109;\end{cases}\begin{cases}u=52,\\v=56;\end{cases}\begin{cases}u=33,\\v=39.\end{cases}$

故 $(x_0,y_0,z_0,t_0)=(107,52,33,12)$ 满足题设.

(3) $p\geqslant5$ 且为质数.

取 $t=3p$，得 $(v-u)(v+u)=9p^3$.

则 $\begin{cases}u=\dfrac{9p^3-1}{2},\\v=\dfrac{9p^3+1}{2};\end{cases}\begin{cases}u=\dfrac{3p^3-3}{2},\\v=\dfrac{3p^3+3}{2};\end{cases}\begin{cases}u=\dfrac{9p^2-p}{2},\\v=\dfrac{9p^2+p}{2}.\end{cases}$

故 (x_0,y_0,z_0,t_0)

$$=\left(\frac{9p^3-1}{2},\frac{3p^3-3}{2},\frac{9p^2-p}{2},3p\right)$$

满足条件.

综上，命题成立.

参考文献：

[1] 宋宝莹　译.第8届丝绸之路数学竞赛(2009)[J].中等数学，2011(增刊).

收稿日期：2012-09-12

$$\sum_{i=1}^{10}\left(\left[\frac{k}{2^i}\right]+\left[\frac{2\,012-k}{2^i}\right]\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{10}\left(\left[\frac{k+1\,024}{2^i}\right]+\left[\frac{2\,012-k-1\,024}{2^i}\right]\right).$$

而 $2^i\mid1\,024$，将整数 $\frac{1\,024}{2^i}$ 提出，故上式成立，即 $S_1\equiv S_4(\bmod 2)$.

同理，$S_2\equiv S_3(\bmod 2)$，即 $S_1-S_2-S_3+S_4$ 为偶数，m 的最大值为10.

【注】上述证明中未考虑 S_4 不存在的情形.若 S_4 不存在，只需说明 $C_{2\,012}^{1\,024-k}$ 为偶数，利用 $n!$ 分解式容易说明其为偶数，结论仍然成立.

参考文献：

[1] 第九届中国东南地区数学奥林匹克[J].中等数学，2012(11).

学生习作

一道安徽预赛题的推广

霍进一
（安徽省合肥市第一中学高三(15)班,230601）

中图分类号：O174.14　文献标识码：A　文章编号：1005-6416(2013)01-0017-01

题目　已知 $m\in\mathbf{N}_+$, $n=2^m$. 求所有的 n 次实系数多项式 $f(x)$，满足

$$f(x^2+1)=f^2(x)+1. \quad ①$$

（2012,全国高中数学联赛安徽赛区预赛）

命题组提供的解法是先猜出符合条件的多项式 $f(x)=x^2+1$，再利用反证法证明唯一性，但要猜出答案并不是一件容易事（不少考生都以为只有 $f(x)=x^2+1$ 符合要求）. 于是，笔者想到：能否有一种做法，可以从多项式满足的性质入手，直接推导出 $f(x)$.

针对条件中的"$n=2^m$"，可以自然地想到：当 $n\neq2^m$ 时，满足条件式①的多项式是否存在？

因此，有了下面更一般的推广：

推广　求所有的 $n\in\mathbf{N}_+$，使得存在 n 次复系数多项式 $f(x)$，满足式①，且找出所有这样的多项式 $f(x)$.

解　先证明下面几个引理.

引理1　已知 $n\in\mathbf{N}_+$. 若 n 次复系数多项式 $f(x)$ 满足式①，则

$$\begin{cases} f(-x)\equiv f(x), & n \text{ 为偶数}; \\ f(-x)\equiv -f(x), & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

引理1的证明　注意到，

$$f^2(-x)+1=f((-x)^2+1)$$
$$=f(x^2+1)=f^2(x)+1$$
$$\Rightarrow (f(-x)+f(x))(f(-x)-f(x))=0$$
$$\Rightarrow f(-x)\equiv f(x) \text{或} f(-x)\equiv -f(x).$$

当 n 为偶数时，$f(-x)+f(x)$ 首项不为0，不可能为零多项式，因此，

$$f(-x)-f(x)=0,$$

即　$f(-x)\equiv f(x)$；

当 n 为奇数时，同理，$f(-x)-f(x)$ 不可能为零多项式，因此，

$$f(-x)\equiv -f(x).$$

引理2　n 为正奇数，n 次复系数多项式 $f(x)$ 满足式①，则 $n=1$，且 $f(x)\equiv x$.

引理2的证明　由引理1知

$$f(-x)\equiv -f(x).$$

特别地，$f(0)=0$.

设数列 $\{a_k\}$ 满足 $a_0=0, a_{k+1}=a_k^2+1$.

归纳可证：对任意的 $k\in\mathbf{N}$，

$$f(a_k)=a_k.$$

由此知存在无穷多个 $x\in\mathbf{R}$，使得

$$f(x)=x.$$

因此，$f(x)\equiv x, n=1$.

引理3　若 $n=2l$ 为偶数，n 次复系数多项式 $f(x)$ 满足式①，则存在 l 次多项式 $g(x)$，使得

$$f(x)=g(x^2+1), \text{且} g(x^2+1)=g^2(x)+1$$

恒成立.

引理3的证明　由引理1，知此时

$$f(-x)\equiv f(x).$$

因此，$f(x)$ 的奇次项系数全为0，可设

$$f(x)=a_{2l}x^{2l}+a_{2l-2}x^{2l-2}+\cdots+a_2x^2+a_0,$$

其中，$a_{2l}\neq0$.

取 $g(x)=a_{2l}(x-1)^l+a_{2l-2}(x-1)^{l-1}+\cdots+a_2(x-1)+a_0$.

于是，$f(x)=g(x^2+1)$.

记 $h(x)=x^2+1$，则 $f(x)=g(h(x))$.

收稿日期：2012-10-12

对一道几何题的赏析

刘伟仪
（华中师范大学第一附属中学高三（29）班，430223）

中图分类号：O123.1 文献标识码：A 文章编号：1005－6416（2013）01－0018－02

笔者在研究叶中豪先生提出的一道几何题时，发现了一系列的优美性质（在文中引理中提及）.

题目 已知$\triangle ABC$的费马点为R，$\triangle ARB$、$\triangle BRC$、$\triangle CRA$的九点圆圆心分别为点D、E、F. 证明：$\triangle DEF$为正三角形.

本题条件简单，证明却有一定难度，涉及到多个基本图形及引理.

证明 先给出几个引理.

引理1 如图1，记$\triangle BRC$、$\triangle CRA$、$\triangle ARB$的外心分别为O_1、O_2、O_3，垂心分别为H_1、H_2、H_3. 则B、O_i、C、H_i四点共圆于$\odot O_i'$（$i=1,2,3$），且三圆共点于T.

引理1的证明 结论几乎是显然的，只需注意

$\angle ARB=\angle BRC=\angle CRA=120°$.

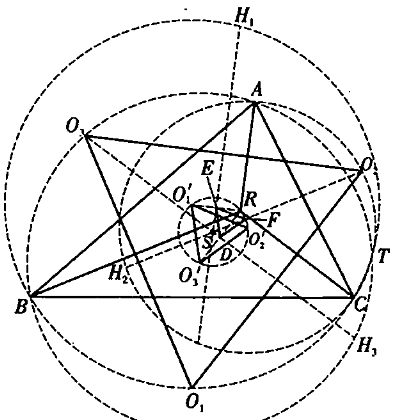


图1

则$\angle BO_1C=\angle CO_2A=\angle AO_3B=120°$，

$\angle BH_1C=\angle CH_2A=\angle AH_3B=60°$.

故B、O_i、C、H_i四点共圆$\odot O_i'$（$i=1,2,3$）.

设$\odot O_1'$与$\odot O_2'$交于点T. 则

$\angle ATC=\angle AO_2C=120°$，

收稿日期：2012－10－19

由$f(h(x))=h(f(x))$

$\Rightarrow g(h(h(x)))=h(g(h(x)))$.

令$y=h(x)$. 故$g(h(y))=h(g(y))$对无穷多个y成立.

所以，$g(x^2+1)=g^2(x)+1$.

回到原题.

设$n=2^m t$（$m\in\mathbf{N}_+$，t为正奇数）.

由引理3，知存在t次多项式$P(x)$使得

$f(x)=P(h^{(m)}(x))$，

且 $P(x^2+1)=P^2(x)+1$

恒成立.

由引理2，知$P(x)\equiv x$，且$t=1$.

因此，$n=2^m$，且$f(x)=h^{(m)}(x)$.

综上，使得满足条件的多项式存在的n只能是$n=2^m$（$m\in\mathbf{N}_+$），且这样的多项式只可能是$f(x)=h^{(m)}(x)$，其中，$h(x)=x^2+1$.

【注】本文是笔者在中国科学技术大学王建伟老师的指导下完成的.

$\angle BTC=\angle BH_1C=60°$.

因此，$\angle BTA=60°$,

$\angle BO_3A+\angle BTA=180°$.

所以，点 T 也在$\odot O_3'$上.

从而，三圆共点于 T.

引理 2　如图 1，$\triangle O_1'O_2'O_3'$是正三角形.

引理 2 的证明　将点 X 对应的复数记为 X.

由引理 1，知$\triangle AO_3'B$ 是顶角为 120°的等腰三角形.

则 $O_3'-A=(O_3'-B)\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}}$，即

$$O_3'=\frac{A+\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}B}{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}}.$$

同理，$O_2'=\dfrac{C+\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}A}{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}}$，$O_1'=\dfrac{B+\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}C}{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}}$.

所以，$O_3'=\dfrac{O_1'-\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}O_2'}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}}$.

故$\triangle O_1'O_2'O_3'$为正三角形.

引理 3　如图 2，R 为$\triangle ABC$ 内一点，D 为过 B、R、C 三点的圆弧的中点，E 为过 A、R、C 三点的圆弧的中点，F 为过 A、R、B 三点的圆弧的中点. 则 R、D、F、E 四点共圆.

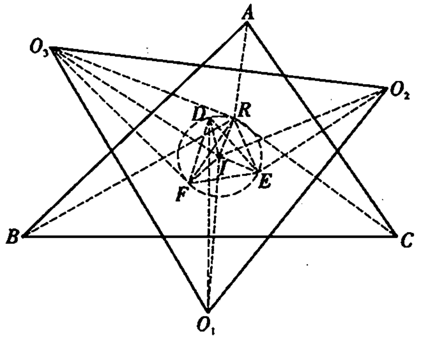


图 2

引理 3 的证明　如图 2，取$\triangle O_1O_2O_3$的内心 I，其中，O_1、O_2、O_3 分别是$\triangle BRC$、$\triangle CRA$、$\triangle ARB$ 的外心.

由题设得 $O_3F\perp AB$.

由 $O_1O_3\perp BR$，O_2O_3垂直平分 AR

$\Rightarrow \angle O_1O_3F=\angle ABR=\frac{1}{2}\angle AO_3R$

$=\angle RO_3O_2$

$\Rightarrow \angle FO_3I=\angle RO_3I$

$\Rightarrow O_3I$ 垂直平分 FR.

同理，O_2I 垂直平分 ER，O_1I 垂直平分 DR.

故 $ID=IE=IF=IR$，即 R、D、F、E 四点共圆.

回到原题.

如图 1，由引理 1，知点 O_i、$H_i(i=1,2,3)$ 均在$\odot O'_i$上.

由引理 2，知$\triangle O_1'O_2'O_3'$为正三角形.

又 $H_2R=2O_2O_2'\cos 120°=O_2O_2'$，且

$H_2R\perp AC$，$O_2O_2'\perp AC$，

因此，$H_2R/\!/O_2O_2'$.

故四边形 $H_2RO_2O_2'$为平行四边形.

从而，RO_2'的中点即 H_2O_2的中点 E.

同理，F、D 分别为 RO_3'、RO_1'的中点.

故由爱可尔斯定理，知对于点正三角形 R 和正$\triangle O_1'O_2'O_3'$有正$\triangle DEF$.

【编者注】爱可尔斯(Echols)定理　两个正三角形对应顶点连线段的中点是一个正三角形的三个顶点.

竞赛之窗

2012年全国高中数学联赛天津赛区预赛

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2013)01－0020－04

一、选择题(每小题6分,共36分)

1. 数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-2n$. 则$a_3+a_{17}=$(　　).

(A)36　(B)35　(C)34　(D)33

2. 已知$x>1$. 则$x^{\ln\ln x}-(\ln x)^{\ln x}$的值是(　　).

(A)正数　(B)零　(C)负数

(D)以上皆有可能

3. 在$\triangle ABC$中,若$\angle A$、$\angle B$为锐角,且

$\sin^2A+\sin^2B=\sin C$,

则对$\triangle ABC$的形状描述最准确的是(　　).

(A)直角三角形　(B)等腰三角形

(C)等腰直角三角形　(D)以上均不对

4. 设椭圆与x轴交于A、B两点,对于椭圆上不同于A、B的任意一点P,直线AP与BP的斜率之积均为$-\frac{1}{2}$. 则椭圆的离心率为(　　).

(A)$\frac{1}{\sqrt{3}}$　(B)$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$　(C)$\frac{1}{2}$　(D)$\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. 在正四面体$ABCD$中,M、N分别是BC、DA的中点. 则直线AM和BN所成角的余弦值是(　　).

(A)$\frac{1}{3}$　(B)$\frac{1}{2}$　(C)$\frac{2}{3}$　(D)$\frac{3}{4}$

6. 在半径为1的球面上有不共面的四个点A、B、C、D,且

$AB=CD=x,BC=DA=y,CA=BD=z.$

则$x^2+y^2+z^2=$(　　).

(A)2　(B)4　(C)8　(D)16

二、填空题(每小题9分,共54分)

7. 函数$y=1+\cos x(x\in[-\pi,\pi])$的图像与$x$轴围成的区域面积是______.

8. 已知六边形$ABCDEF$是边长为2的正六边形,一条抛物线经过A、B、C、D四点. 则该抛物线的焦点到准线的距离是______.

9. 已知复数z满足$|z|=1$,且$z^2=a+b\mathrm{i}$(a、b为实数). 则$a+b$的最大值是______.

10. 函数

$y=|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-10|$

的最小值是______.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=$______.

12. 若对一切正实数x、y不等式

$\frac{y}{4}-\cos^2x\geqslant a\sin x-\frac{9}{y}$

都成立,则实数a的取值范围是______.

三、解答题(每小题20分,共60分)

13. 已知双曲线的两个焦点坐标分别为$F_1(-2,0)$和$F_2(2,0)$,双曲线的一条切线与x轴交于$Q\left(\frac{1}{2},0\right)$,且斜率为2.

(1)求双曲线的方程;

(2)若切线与双曲线的切点为P,证明:$\angle F_1PQ=\angle F_2PQ$.

14. 电脑每秒钟以相同的概率输出一个数字1或2. 将输出的前n个数字之和被3整除的概率记为p_n. 证明:

(1)$p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-p_n)$;

(2)$p_{2012}>\frac{1}{3}$.

15. 已知三次函数

$f(x)=4x^3+ax^2+bx+c(a、b、c\in\mathbf{R})$

满足

$-1\leqslant f(x)\leqslant 1(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

求 $a、b、c$ 的所有可能取值.

参考答案

一、1. C.

当 $n>1$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-3$.

因此，$a_3+a_{17}=34$.

2. B.

设 $y=\ln x$. 则 $x=\mathrm{e}^y$.

故原式 $=(\mathrm{e}^y)^{\ln y}-y^y=0$.

3. A.

若 $\angle A+\angle B>\frac{\pi}{2}$，则

$\sin A>\cos B,\sin B>\cos A$.

故 $\sin^2A+\sin^2B$

$>\sin A\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos A$

$=\sin(A+B)=\sin C$.

矛盾.

同理，若 $\angle A+\angle B<\frac{\pi}{2}$，也推出矛盾.

所以，$\angle A+\angle B=\frac{\pi}{2}$.

4. D.

不妨设 $A(1,0),B(-1,0),P(x,y)$.

则 l_{AP} 的斜率为 $\frac{y}{x-1}$，l_{BP} 的斜率为 $\frac{y}{x+1}$.

依题意得 $\frac{y}{x-1}\cdot\frac{y}{x+1}=-\frac{1}{2}$.

由此得椭圆方程为 $x^2+2y^2=1$.

故离心率为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. C.

不妨设正四面体的棱长为 1. 则

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=1,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}$,

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2},\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$.

而 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

$\overrightarrow{NB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB})$,

故 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NB}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB})=\frac{1}{2}$.

又 $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{NB}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 AM 与 BN 所成角的余弦值是

$$\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NB}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{NB}|}=\frac{2}{3}.$$

6. C.

构造一个长方体，使得四面体 $ABCD$ 的六条棱分别是长方体某个面的对角线. 此时，长方体的体对角线长为 $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}$，其恰好等于外接球面的直径.

故 $x^2+y^2+z^2=8$.

二、7. 2π.

作出四条直线 $y=2,x=-\pi,x=\pi,y=0$，则所给函数的图像落在上述四条直线所围成的长方形内部，且关于 y 轴对称. 在第一象限内的部分，函数图像关于点 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 成中心对称，因此，这部分函数图像与 x 轴、y 轴所围成区域的面积等于相应长方形面积的一半.

从而，整个函数图像与 x 轴围成的区域面积为前述长方形面积的一半，即 2π.

8. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

建立平面坐标系，使得

$A(-2,\sqrt{3}),B(-1,0),C(1,0),D(2,\sqrt{3})$.

则可求得该抛物线方程为

$\sqrt{3}y=x^2-1$.

故抛物线焦点到准线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. $\sqrt{2}$.

由 $|z|=1\Rightarrow|z^2|=1\Rightarrow a^2+b^2=1$

$\Rightarrow(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)=2$.

故 $a+b\leqslant\sqrt{2}$，且当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立.

从而，$a+b$ 的最大值是为 $\sqrt{2}$.

10. 25.

注意到，

$$|x-1|+|x-10|$$
$$\geqslant|(x-1)-(x-10)|=9,$$

且等号当 $x\in[1,10]$ 时成立.

同理，$|x-2|+|x-9|\geqslant7,\cdots,$

$$|x-5|+|x-6|\geqslant1,$$

且等号分别当 $x\in[2,9],\cdots,x\in[5,6]$ 时成立. 因此，

$$y\geqslant9+7+\cdots+1=25,$$

且当 $x\in[5,6]$ 时等号成立.

故所求最小值为 25.

11. $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

12. $[-3,3]$.

依题意知

$$\cos^2x+a\sin x\leqslant\frac{y}{4}+\frac{9}{y}$$

对一切正实数 x、y 成立. 则不等式的左端必小于或等于右端的最小值 3.

令 $t=\sin x$. 故

$$-t^2+at\leqslant2(t\in[-1,1]).$$

取 $t=-1$，得 $a\geqslant-3$；

取 $t=1$，得 $a\leqslant3$.

当 $a\in[-3,3]$ 时，易证对任意的 $t\in[-1,1]$ 均有 $-t^2+at\leqslant2$ 成立.

因此，a 的取值范围为 $[-3,3]$.

三、**13. 解法 1** 设双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

由于其与直线 $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即 $y=2x-1$ 相切，则联立方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=2x-1,\end{cases}$$

只有唯一一组解. 故关于 x 的方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(2x-1)^2}{b^2}=1 \qquad ①$$

有两个相等的实根，其判别式 $\Delta=0$，即

$$\left(\frac{4}{b^2}\right)^2-4\left(\frac{1}{a^2}-\frac{4}{b^2}\right)\left(-\frac{1}{b^2}-1\right)=0$$
$$\Rightarrow b^2-4a^2+1=0. \qquad ②$$

由双曲线的两个焦点坐标得其半焦距为 $c=2$.

则 $a^2+b^2=4$.

与式②联立解得 $a^2=1,b^2=3$.

因此，双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，且式①关于 x 的方程变为

$$x^2-\frac{(2x-1)^2}{3}=1\Rightarrow x=2.$$

代入 $y=2x-1$，得 $y=3$.

这表明，切点 $P(2,3)$.

因此，直线 F_1P 的斜率为

$$k=\frac{3-0}{2-(-2)}=\frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow\tan\angle F_1PQ=\frac{t-k}{1+kt}=\frac{1}{2},$$

其中，$t=2$ 是切线 PQ 的斜率.

又点 F_2 与 P 的横坐标相同，则

$$F_2P/\!/y\text{ 轴}\Rightarrow\tan\angle F_2PQ=\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\tan\angle F_1PQ=\tan\angle F_2PQ$$
$$\Rightarrow\angle F_1PQ=\angle F_2PQ.$$

解法 2 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

由半焦距 $c=2$，知 $a^2+b^2=4$.

又设点 $P(x_0,y_0)$. 则过 P 的切线方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

与所给的切线方程 $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即

$2x-y=1$ 比较知

$x_0=2a^2, y_0=b^2$.

将其代入$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$,得 $4a^2-b^2=1$.

与 $a^2+b^2=4$ 联立解得 $a^2=1, b^2=3$.

因此,双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

从而,切点坐标为

$(x_0,y_0)=(2a^2,b^2)=(2,3)$.

余下同解法 1.

14. 证法 1 这 n 个数字共有 2^n 种可能情形.

设其中数字和被 3 整除的有 x_n 种. 则不被 3 整除的有 2^n-x_n 种.

对于 $n+1$ 个数字的情形,若其和被 3 整除,则前 n 个数字之和不被 3 整除;反之,对于前 n 个数字之和不被 3 整除的每种情形,有唯一的第 $n+1$ 个数字可使前 $n+1$ 个数字之和被 3 整除. 因此,

$x_{n+1}=2^n-x_n$.

这表明,概率 $p_n=\frac{x_n}{2^n}$满足递推关系式

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-p_n)$$

$$\Rightarrow p_{n+1}-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow p_{2012}-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2011}\left(p_1-\frac{1}{3}\right)>0$$

$$\Rightarrow p_{2012}>\frac{1}{3}.$$

证法 2 若输出的前 n 个数字之和被 3 整除的概率为 p_n,则不被 3 整除的概率为 $1-p_n$. 要使输出的前 $n+1$ 个数字之和被 3 整除,则必须使前 n 个数字之和不被 3 整除,且此时第 $n+1$ 个数字也随之确定.

所以,由条件概率的公式得

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-p_n).$$

余下同证法 1.

证法 3 n 个数字共有 2^n 种可能情形.

下面计算其和被 3 整除的种数,这等于多项式 $f(x)=(x+x^2)^n$ 的展开式中 $x^3, x^6, \cdots$ 等项的系数之和,即

$$\frac{1}{3}(f(1)+f(\omega)+f(\bar{\omega})), \quad ①$$

其中,$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 为三次单位根,$\bar{\omega}$ 是其共轭复数.

故式①$=\frac{1}{3}[2^n+2(-1)^n]$.

因此,所求的概率为

$$p_n=\frac{1}{3}\left[1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

可验证 $p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-p_n)$ 及 $p_{2012}>\frac{1}{3}$.

15. 由题意,当 $x=\pm1, \pm\frac{1}{2}$时,均有

$-1\leqslant f(x)\leqslant1$.

故 $-1\leqslant4+a+b+c\leqslant1$, ①

$-1\leqslant4-a+b-c\leqslant1$, ②

$-1\leqslant\frac{1}{2}+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\leqslant1$, ③

$-1\leqslant\frac{1}{2}-\frac{a}{4}+\frac{b}{2}-c\leqslant1$. ④

①+②得 $-2\leqslant8+2b\leqslant2$,从而,$b\leqslant-3$;

③+④得 $-2\leqslant1+b\leqslant2$,从而,$b\geqslant=-3$.

因此,$b=-3$.

代入不等式①~④得

$a+c=0, \frac{a}{4}+c=0$.

从而,$a=c=0$.

下面证明:$f(x)=4x^3-3x$ 满足条件.

事实上,若 $-1\leqslant x\leqslant1$,则令

$x=\cos t(t\in\mathbf{R})$.

故 $f(x)=f(\cos t)$

$=4\cos^3t-3\cos t=\cos 3t$.

又 $-1\leqslant\cos 3t\leqslant1$,则 $-1\leqslant f(x)\leqslant1$.

综上,$a=0, b=-3, c=0$.

(丁龙云 提供)

2012年全国高中数学联赛湖北赛区预赛

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005-6416(2013)01-0024-04

一、填空题(每小题8分,共64分)

1. 函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+4x+7}}$ 的值域为______.

2. 已知 $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$,

$3(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2(\sin\beta+\cos\beta)^2=1$.

则 $\cos 2(\alpha+\beta)=$______.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1\in\mathbf{N}_+,a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, & a_n\text{ 为偶数};\\ 3a_n+1, & a_n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

若 $a_1+a_2+a_3=29$,则 $a_1=$______.

4. 设集合 $S=\{1,2,\cdots,12\}$,$A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 是 S 的子集,且满足

$a_1<a_2<a_3,a_3-a_2\leqslant 5$.

则满足条件的子集 A 的个数为______.

5. 过原点 O 的直线 l 与椭圆

$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

交于 M、N 两点,P 是椭圆 C 上异于 M、N 的任一点. 若直线 PM、PN 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{3}$,则椭圆 C 的离心率为______.

6. 在 $\triangle ABC$ 中,设 $AB=BC=2,AC=3$,O 为 $\triangle ABC$ 的内心. 若 $\overrightarrow{AO}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$,则 $\dfrac{p}{q}=$______.

7. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,已知 $AC=1,B_1C=\sqrt{2},AB_1=p$. 则当长方体的体积最大时,$p=$______.

8. 设 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. 则

$$\sum_{k=0}^{2\,012}\left[\frac{2\,012+2^k}{2^{k+1}}\right]=\_\_\_\_\_\_.$$

二、解答题(共56分)

9. (16分)已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\sqrt{a_na_{n+1}+a_na_{n+2}}=4\sqrt{a_na_{n+1}+a_{n+1}^2}+3\sqrt{a_na_{n+1}},$$

且 $a_1=1,a_2=8$. 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

10. (20分)已知正实数 a、b 满足

$a^2+b^2=1$,

且 $a^3+b^3+1=m(a+b+1)^3$.

求 m 的取值范围.

11. (20分)已知 $E(m,n)$ 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 内一定点,过 E 作斜率分别为 k_1、k_2 的两条直线,与抛物线交于点 A、B、C、D,且 M、N 分别是线段 AB、CD 的中点.

(1)当 $n=0$,且 $k_1k_2=-1$ 时,求 $\triangle EMN$ 面积的最小值;

(2)若 $k_1+k_2=\lambda(\lambda\neq 0,\lambda$为常数),证明:直线 MN 过定点.

参考答案

一、1. $\left[0,\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right]$.

取 $A=f^2(x)\geqslant 0$. 则

$Ax^2+(4A-1)x+7A-1=0$

$$\Rightarrow \Delta=(4A-1)^2-4A(7A-1)\geqslant 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\leqslant A\leqslant\frac{1}{6}\Rightarrow 0\leqslant A\leqslant\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow f(x)\in\left[0,\frac{\sqrt{6}}{6}\right].$$

2. $-\frac{1}{3}$.

由$\begin{cases}3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1,\\3(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2(\sin\beta+\cos\beta)^2=1\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}3\cos 2\alpha+2\cos 2\beta=3, & ①\\3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0. & ②\end{cases}$$

将式①、②两边平方相加得

$$\cos 2(\beta+\alpha)=-\frac{1}{3}.$$

3. 5.

若 $a_1=2k+1(k\in\mathbf{N})$,则

$a_2=6k+4,a_3=3k+2$.

由 $a_1+a_2+a_3=29\Rightarrow k=2\Rightarrow a_1=5$.

若 $a_1=2k(k\in\mathbf{N}_+)$,则

$$a_2=k,a_3=\begin{cases}\frac{k}{2}, & k\text{ 为偶数};\\3k+1, & k\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

又 $a_1+a_2+a_3=29$,故 k 不可能为整数.

4. 185.

由于子集 A 要满足条件

$a_1<a_2<a_3,a_3-a_2\leqslant 5$,

于是,可采用分类法求解.

当 $a_1=k(1\leqslant k\leqslant 6)$ 时,则当 $a_2=k+1,\cdots,7$ 时,a_3 均有 5 种可能,故有 $5(7-k)$ 种;

当 a_2 依次取 8、9、10、11 时,对应的 a_3 能取 $4+3+2+1=10$ 种.

当 $a_1=7$ 时,则 a_2 依次取 8、9、10、11,对应的 a_3 能取 $4+3+2+1=10$ 种;

当 $a_1=8$ 时,则 a_2 依次取 9、10、11,对应的 a_3 能取 $3+2+1=6$ 种;

当 $a_1=9$ 时,则 a_2 依次取 10、11,对应的 a_3 能取 $2+1=3$ 种;

当 $a_1=10$ 时,则 a_2 取 11,对应的 a_3 能取 1 种.

所以,子集 A 的个数为

$5(6+5+\cdots+1)+7\times10+6+3+1=185$.

5. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

当 l 为 x 轴时,则 $M(-a,0),N(a,0)$.

故取 $P(0,b)$.

于是,$k_{PM}=\frac{b}{a},k_{PN}=-\frac{b}{a}$.

因此,$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{1}{3}$.

所以,$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

6. $\frac{3}{2}$.

取 AC 的中点 D,则$\overrightarrow{OD}=\frac{3}{7}\overrightarrow{BD}$.

又$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}$

$$=-\frac{3}{7}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=-\frac{3}{7}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AB},$$

从而,$\frac{p}{q}=\frac{3}{2}$.

7. $\sqrt{1+\frac{2\sqrt{3}}{3}}$.

记从一个顶点出发的三条棱长分别为 a、b、c.

根据题意知

$$\begin{cases}a^2+b^2=1,\\b^2+c^2=2,\\a^2+c^2=p^2=t>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow(a,b,c)=\left(\sqrt{\frac{t-1}{2}},\sqrt{\frac{3-t}{2}},\sqrt{\frac{1+t}{2}}\right).$$

则体积 $V=\frac{\sqrt{(3-t)(t-1)(1+t)}}{2\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{-t^3+3t^2+t-3}}{2\sqrt{2}}(1\leqslant p^2=t\leqslant 3).$$

设 $f(t)=-t^3+3t^2+t-2$.

由 $f'(t)=-3t^2+6t+1=0$

$$\Rightarrow t=\frac{3\pm 2\sqrt{3}}{3}.$$

当 $t=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ 时，V 取最大值，此时，

$$p=\sqrt{1+\frac{2\sqrt{3}}{3}}.$$

8. 2 012.

因为 $2\ 012=2^{11}-2^5-2^2$，所以，

$$\sum_{k=0}^{2\,012}\left[\frac{2\ 012+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{10}\left[\frac{2^{11}-2^5-2^2}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=(2^{10}-2^4-2)+(2^9-2^3-1)+(2^8-2^2)+(2^7-2)+(2^6-1)+(2^5-1)+2^4+2^3+2^2+2+1$$

$$=2\ 012.$$

二、**9.** 将等式两边同时除以 $\sqrt{a_na_{n+1}}$ 得

$$\sqrt{1+\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}=4\sqrt{1+\frac{a_{n+1}}{a_n}}+3$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}+1=4\left(\sqrt{1+\frac{a_{n+1}}{a_n}}+1\right).$$

令 $b_n=\sqrt{1+\frac{a_{n+1}}{a_n}}+1$. 则

$b_1=4,b_{n+1}=4b_n\Rightarrow b_n=4^{n-1}b_1=4^n$.

所以，$\sqrt{1+\frac{a_{n+1}}{a_n}}+1=4^n$，即

$$a_{n+1}=[(4^n-1)^2-1]a_n.$$

于是，当 $n>1$ 时，

$$a_n=[(4^{n-1}-1)^2-1]a_{n-1}$$

$$=[(4^{n-1}-1)^2-1][(4^{n-2}-1)^2-1]a_{n-2}$$

$$=\cdots=\prod_{k=1}^{n-1}[(4^k-1)^2-1]a_1$$

$$=\prod_{k=1}^{n-1}[(4^k-1)^2-1].$$

$$\text{故 } a_n=\begin{cases}1, & n=1;\\ \prod\limits_{k=1}^{n-1}[(4^k-1)^2-1], & n\geqslant 2.\end{cases}$$

10. 令 $a=\cos\theta,b=\sin\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$. 则

$$m=\frac{\cos^3\theta+\sin^3\theta+1}{(\cos\theta+\sin\theta+1)^3}$$

$$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos^2\theta-\cos\theta\cdot\sin\theta+\sin^2\theta)+1}{(\cos\theta+\sin\theta+1)^3}.$$

令 $x=\cos\theta+\sin\theta$. 则

$$x=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in(1,\sqrt{2}],$$

且 $\cos\theta\cdot\sin\theta=\frac{x^2-1}{2}$.

$$\text{故 } m=\frac{x\left(1-\frac{x^2-1}{2}\right)+1}{(x+1)^3}=\frac{2+3x-x^3}{2(x+1)^3}$$

$$=\frac{2+x-x^2}{2(x+1)^2}=\frac{2-x}{2(x+1)}$$

$$=\frac{3}{2(x+1)}-\frac{1}{2}.$$

因为函数 $f(x)=\frac{3}{2(x+1)}-\frac{1}{2}$ 在 $(1,\sqrt{2}]$ 上单调递减，所以，

$$f(\sqrt{2})\leqslant m<f(1).$$

又 $f(1)=\frac{1}{4}$，$f(\sqrt{2})=\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$，则

$$m\in\left[\frac{3\sqrt{2}-4}{2},\frac{1}{4}\right).$$

11. 记 $l_{AB}:x=t_1(y-n)+m\left(t_1=\frac{1}{k_1}\right)$.

代入 $y^2=2px$,得

$y^2-2pt_1y+2pt_1n-2pm=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$. 则

$y_1+y_2=2pt_1$

$\Rightarrow x_1+x_2=t_1(y_1+y_2-2n)+2m$

$=t_1(2pt_1-2n)+2m$.

故 $M(pt_1^2-nt_1+m,pt_1)$.

记 $l_{CD}:x=t_2(y-n)+m\left(t_2=\frac{1}{k_2}\right)$.

同理,$N(pt_2^2-nt_2+m,pt_2)$.

(1)当 $n=0$ 时,

$E(m,0)$,$M(pt_1^2+m,pt_1)$,

$N(pt_2^2+m,pt_2)$,

$|EM|=|pt_1|\sqrt{1+t_1^2}$,

$|EN|=|pt_2|\sqrt{1+t_2^2}$.

又 $k_1k_2=-1$,则 $t_1t_2=-1$.

故 $S_{\triangle EMN}=\frac{1}{2}|EM||EN|$

$=\frac{1}{2}|p^2t_1t_2|\sqrt{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}$

$=\frac{p^2}{2}\sqrt{2+t_1^2+t_2^2}$

$\geqslant\frac{p^2}{2}\sqrt{4}=p^2$,

当且仅当 $|t_1|=|t_2|=1$ 时,上式等号成立.

所以,$\triangle EMN$ 面积的最小值为 p^2.

(2)由 $k_{MN}=\dfrac{p(t_1-t_2)}{p(t_1^2-t_2^2)-n(t_1-t_2)}$

$=\dfrac{1}{(t_1+t_2)-\frac{n}{p}}$,

知直线 MN 的方程为

$$y-pt_1=\frac{1}{(t_1+t_2)-\frac{n}{p}}\left[x-(pt_1^2-nt_1+m)\right]$$

$$\Rightarrow y\left(t_1+t_2-\frac{n}{p}\right)-pt_1t_2=x-m. \qquad ①$$

又 $k_1+k_2=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\lambda$,即 $t_1t_2=\frac{t_1+t_2}{\lambda}$,

代入式①得

$$y\left(t_1+t_2-\frac{n}{p}\right)-p\cdot\frac{t_1+t_2}{\lambda}=x-m$$

$$\Rightarrow(t_1+t_2)\left(y-\frac{p}{\lambda}\right)=x+\frac{ny}{p}-m.$$

当 $y-\frac{p}{\lambda}=0$ 时,$x+\frac{ny}{p}-m=0$,即

$$\begin{cases}y=\frac{p}{\lambda},\\ x=m-\frac{n}{\lambda}\end{cases}$$

为方程的一组解.

从而,直线 MN 恒过定点 $\left(m-\frac{n}{\lambda},\frac{p}{\lambda}\right)$.

(徐胜林　提供)

2012 年全国高中数学联赛吉林赛区预赛

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2013)01－002－03

一、选择题(每小题 6 分，共 30 分)

1. 已知等差数列$\{a_n\}$满足

$a_1>0, 5a_8=8a_{13}$.

则前 n 项和 S_n 取最大值时，n 的值为(　　).

(A)20　(B)21　(C)22　(D) 23

2. 若集合

$S_1=\{(x,y)|\lg(1+x^2+y^2)\leqslant 1+\lg(x+y)\}$,

$S_2=\{(x,y)|\lg(2+x^2+y^2)\leqslant 2+\lg(x+y)\}$,

则 S_2 的面积与 S_1 的面积比为(　　).

(A) 99∶1　(B) 100∶1

(C) 101∶1　(D) 102∶1

3. 若一系列函数的解析式相同，值域相同，但其定义域不同，则称这些函数为“同族函数”. 那么，函数解析式为 $y=-x^2$，值域为$\{0,-1,-9\}$的同族函数共有(　　)个.

(A)7　(B)8　(C)9　(D)10

4. 设方程

$$\log_4 x-\left(\frac{1}{4}\right)^x=0 \text{ 与 } \log_{\frac{1}{4}} x-\left(\frac{1}{4}\right)^x=0$$

的根分别为 x_1、x_2. 则(　　).

(A)$0<x_1x_2<1$　(B)$x_1x_2=1$

(C)$1<x_1x_2<2$　(D)$x_1x_2\geqslant 2$

5. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n\geqslant 4)$ 为集合

$S=\{1,2,\cdots,n\}$

的 n 个不同子集，为了表示这些子集，作 n 行 n 列的数阵，规定第 i 行第 j 列的数为

$$a_{ij}=\begin{cases}0, & i\notin A_j;\\ 1, & i\in A_j.\end{cases}$$

则下列说法中，错误的是(　　).

(A)数阵中第一列的数全是 0 当且仅当 $A_1=\varnothing$

(B)数阵中第 n 列的数全是 1 当且仅当 $A_n=S$

(C)数阵中第 j 行的数字和表明集合 A_j 含有几个元素

(D)数阵中所有的 n^2 个数字之和不超过 n^2-n+1

二、填空题(每小题 6 分，共 30 分)

6. 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，令

$$T_n=\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n},$$

称 T_n 为数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的“均数”. 若数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{1005}$ 的均数为2 012，则数列 $-1, a_1, a_2, \cdots, a_{1005}$ 的均数是______.

7. 已知 P 是$\triangle ABC$ 所在平面内一点，满足$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$. 则$\triangle ABP$ 与$\triangle ABC$ 的面积之比为______.

8. 方程 $2(x-1)\sin \pi x+1=0$ 在区间$[-2,4]$内的所有解之和等于______.

9. 在$\triangle ABC$ 中，已知 D 为边 AC 的中点，$AB=3, BD=BC$，$\triangle ABC$ 的面积为 3. 则$\angle A=$______.

10. 函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对于任意 x_1、$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上为“非减函数”. 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上为非减函数，且满足以下三个条件：

(1) $f(0)=(0)$；

(2) $f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2}f(x)$；

(3) $f(1-x)=1-f(x)$.

则 $f\left(\frac{5}{12}\right)+f\left(\frac{1}{8}\right)=$______.

三、解答题(每小题 15 分，共 60 分)

11. 已知数列$\{a_n\}$满足

$a_1=1,a_2=2,a_3=3,a_4=4,a_5=5.$

当 $n\geqslant 5$ 时，$a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$. 问：存在多少个正整数 m，使得

$a_1a_2\cdots a_m=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2$?

12. (1)若对任意的 $0<x<1$ 都有

$(1+x^2)(2-x)<M$

成立，求常数 M 的最小值；

(2)对正整数 $n\geqslant 3$，若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}_+$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，证明：

$$\frac{1}{1+x_1^2}+\frac{1}{1+x_2^2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n^2}>\frac{2n-1}{2}.$$

13. 在锐角△ABC 中，已知 $AH\perp BC$ 于点 H，P 为高 AH 上的一点，过 P 作 AB 的垂线与△ABH的外接圆交于点 D、D'，过 P 作 AC 的垂线与△ACH 的外接圆交于点 E、E'. 证明：D、D'、E、E'四点共圆，并指出所共圆的圆心.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$a_n=2\ 012+3n.$

求所有的正整数 n，使得数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项能分成两部分，这两部分的和相等.

参考答案

一、**1.** B.

由 $5a_8=8a_{13}$

$\Rightarrow 5(a_1+7d)=8(a_1+12d)$

$\Rightarrow d=-\dfrac{3}{61}a_1.$

由 $a_n=a_1+(n-1)d$

$=a_1+(n-1)\left(-\dfrac{3}{61}a_1\right)\geqslant 0$

$\Rightarrow n\leqslant\dfrac{64}{3}.$

所以，数列前 21 项都是正数，以后各项都是负数.

故前 n 项和 S_n 取最大值时，n 的值为21.

2. D.

S_1表示圆盘：$(x-5)^2+(y-5)^2\leqslant 49$，面积为 49π.

S_2 表示圆盘：$(x-50)^2+(y-50)^2\leqslant 4\ 998$，面积为 $4\ 998\pi$.

因此，面积比为 102∶1.

3. C.

$1\times3\times3=9.$

4. A.

显然，$x_2=\dfrac{1}{2}$.

设 $f(x)=\log_4x-\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$. 则

$f(1)f(2)<0\Rightarrow 1<x_1<2.$

5. C.

当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中一个为 S 本身，其余 $n-1$个子集为 S 的互不相同的 $n-1$ 元子集时，数阵中所有的 n^2 个数字之和最大，且为 n^2-n+1. 因此，选项 D 正确.

数阵中第 j 行的数字和表明元素 j 属于几个子集. 因此，选项 C 错误.

二、**6.** 2 009.

设 $A_n=S_1+S_2+\cdots+S_n$. 则

$T_{1\,005}=\dfrac{S_1+S_2+\cdots+S_{1\,005}}{1\ 005}=\dfrac{A_{1\,005}}{1\ 005}=2\ 012.$

从而，$A_{1\,005}=2\ 012\times1\ 005.$

故$T_{1\,006}=\dfrac{-1+(-1+S_1)+(-1+S_2)+\cdots+(-1+S_{1\,005})}{1\,006}$

$=\dfrac{-1\ 006+A_{1\,005}}{1\ 006}=-1+2\times1\ 005$

$=2\ 009.$

7. 2∶1.

由$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}$

$\Rightarrow\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PC}\Rightarrow C$ 为 AP 的中点.

故△ABP 与△ABC 的面积之比为 2∶1.

8. 8.

因为 $y=2\sin\pi x$ 与 $y=-\dfrac{1}{x-1}$的图像都关于点(1,0)成中心对称，共 8 个交点，所以，其和为 8.

9. $\dfrac{\pi}{4}$.

如图1，过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E.

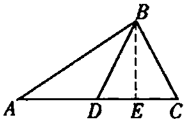


图1

设 $BE=x$，

$AE=y$.

则 $x^2+y^2=9$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}x\times\frac{4}{3}y$

$=\frac{2}{3}xy=3$.

故 $x=y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

从而，$\angle A=\frac{\pi}{4}$.

10. $\frac{3}{4}$.

由(1)、(3)得 $f(1)=1$.

在(3)中取 $x=\frac{1}{2}$，得

$f\left(\frac{1}{2}\right)=1-f\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

在(2)中取 $x=1$，得

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}$.

又函数是非减函数，$\frac{1}{3}<\frac{5}{12}<\frac{1}{2}$，则

$f\left(\frac{5}{12}\right)=\frac{1}{2}$.

在(2)中分别取 $x=\frac{1}{2},\frac{1}{3}$，得

$f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，

$f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}$.

再由函数是非减函数，$\frac{1}{9}<\frac{1}{8}<\frac{1}{6}$，得

$f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{4}$.

所以，$f\left(\frac{5}{12}\right)+f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

三、**11.** 记

$b_n=a_1a_2\cdots a_n-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2(n\geqslant1)$.

则 $b_{n+1}=a_1a_2\cdots a_{n+1}-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_{n+1}^2$

$=a_1a_2\cdots a_n(a_1a_2\cdots a_n-1)-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2-(a_1a_2\cdots a_n-1)^2$

$=a_1a_2\cdots a_n-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2-1$

$=b_n-1(n\geqslant5)$.

这表明，$\{b_n\}$ 从第5项开始构成一个以 $b_5=65$ 为首项、-1 为公差的等差数列.

易知，$b_1=0$，$b_2\neq0$，$b_3\neq0$，$b_4\neq0$.

当 $n\geqslant5$ 时，$b_{n+1}=b_n-1$.

故 $b_{70}=b_5+(70-5)\times(-1)=0$.

因此，满足题意的正整数 $m=70$ 或 1.

12. (1)一方面，

$(1+x^2)(2-x)<2\Leftrightarrow0>-x(x-1)^2$，当 $0<x<1$ 时，显然成立.

另一方面，当 $x\to0$（或 $x\to1$）时，

$(1+x^2)(2-x)\to2$.

所以，M 的最小值为2.

(2)由(1)知

$\frac{1}{1+x_i^2}>\frac{2-x_i}{2}(i=1,2,\cdots,n)$.

将上面 n 个式子相加得

$\frac{1}{1+x_1^2}+\frac{1}{1+x_2^2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n^2}>\frac{2n-1}{2}$.

13. 因为 $AH\perp BC$，且 A、H、C、E 四点共圆，所以，$AE\perp EC$；

因为 $AH\perp BC$，且 A、H、B、D 四点共圆，所以，$AD\perp DB$.

而 $AP\perp BC$

$\Rightarrow PB^2-PC^2=AB^2-AC^2$

$=(AD^2+DB^2)-(AE^2+EC^2)$， ①

$PD\perp AB\Rightarrow PA^2-PB^2=DA^2-DB^2$， ②

$EP\perp CA\Rightarrow PC^2-PA^2=EC^2-EA^2$. ③

①+②+③得

$2(AD^2-AE^2)=0$.

所以，$AD=AE$.

又 $DD'\perp$ 直径 AB，$EE'\perp$ 直径 AC

$\Rightarrow AD=AD'$，$AE=AE'$

$\Rightarrow D$、D'、E、E' 四点共圆，其圆心为 A.

14. 易知，$\{a_n\}$ 为等差数列，且

再品佳题

2005 美国国家队选拔考试

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2013)01－0031－05

1. 给定整数 $n(n>1)$，对正整数 m，令 $S_m=\{1,2,\cdots,mn\}$.

集族 $\mathscr{T}$ 满足如下条件：

（1）集族 $\mathscr{T}$ 中的每个集合都是 S_m 的 m 元子集；

（2）集族 $\mathscr{T}$ 中的任意两个集合至多有一个公共元素；

（3）S_m 的任意一个元素恰出现在集族 $\mathscr{T}$

$S_n=2\,012n+\dfrac{3}{2}n(n+1)$.

要使数列前 n 项能分为和相等的两部分，则 S_n 能被 2 整除.

所以，$n\equiv0\pmod 4$ 或 $n+1\equiv0\pmod 4$.

(1) $n\equiv0\pmod 4$.

则 $n=4k(k\in\mathbf{N}_+)$.

由 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_{2k}+a_{2k+1}$，知从这 $2k$ 组数中抽出 k 组作为一部分，其余的为另一部分，可使这两部分的和相等.

(2) $n+1\equiv0\pmod 4$.

则 $n=4k-1(k\in\mathbf{N}_+)$.

设第一部分有 i 项，第二部分有 j 项 $(i>j,i+j=n)$，两部分的和分别为 T_1、T_2.

若 $T_1=T_2$，则

$T_1\equiv2\,012i\equiv-i\pmod 3$,

$T_2\equiv2\,012j\equiv-j\pmod 3$.

所以，$i\equiv j\pmod 3$，即 $i-j$ 为 3 的倍数.

又 $i+j=4k-1$ 为奇数，故 $i-j$ 为奇数.

设 $i-j=3(2l+1)(l\in\mathbf{N})$. 则

$i=2k+3l+1,\ j=2k-3l-2$.

又 $T_1\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_i$

$=2\,012i+\dfrac{3}{2}(1+i)i$,

$T_2\leqslant a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{4k-1}$

$=2\,012j+\dfrac{3}{2}(4k+i)j$,

$T_1=T_2$,

从而，n 应满足

$$2\,012i+\frac{3}{2}(1+i)i\leqslant2\,012j+\frac{3}{2}(4k+i)j$$

$$\Rightarrow 4k^2-8k\geqslant2\,014+9l^2+4\,033l+12lk$$

$$\Rightarrow 4k^2-8k\geqslant2\,014$$

$$\Rightarrow k\geqslant24$$

$$\Rightarrow n=4k-1\geqslant4\times24-1=95.$$

当 $n=95,k=24$ 时，

$$\sum_{n=50}^{95}(2\,012+3n)-\sum_{n=1}^{49}(2\,012+3n)=294.$$

因为 $294\div6=49$，将第 1 项和第 50 项交换，所以，两部分的和相等，即将第 2 项至第 50 项分为一部分，其余的分为另一部分，则两部分的和相等.

当 $n>95$，且 $n=4k-1$ 时，可将 n 表示为 $n=95+(k-24)\times4$.

于是，前 95 项按照 $n=95$ 划分，后 $4(k-24)$ 项按照(1)的方法划分. 这样的两部分的和相等.

综上，$n\in\{4k\mid k\in\mathbf{N}_+\}\cup\{4k-1\mid k\in\mathbf{N}_+,k\geqslant24\}$.

（郭　民　提供）

中的两个集合中.

试求 m 的最大值.

2. 已知锐角$\triangle A_1A_2A_3$ 的外心、垂心分别为 O、H,点 P_i、Q_i($1\leqslant i\leqslant 3$)分别在线段 OA_i、$A_{i+1}A_{i+2}$($A_{i+3}=A_i$)上,使得四边形 OP_iHQ_i 是平行四边形. 证明:

$$\frac{OQ_1}{OP_1}+\frac{OQ_2}{OP_2}+\frac{OQ_3}{OP_3}\geqslant 3.$$

3. 对于正整数 n,S 表示由所有系数均为不超过 $n!$ 的正整数的 n 次多项式 $P(x)$ 构成的集合. 若对于多项式 $P(x)$ 和任意正整数 k,序列 $P(1),P(2),\cdots$中有无穷多项与 k 互质,则称 $P(x)$是"好的". 证明:集合 S 中至少有 71% 的多项式是好的.

4. 已知 $n\in\mathbf{N}_+,a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$,且

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_kx^k,g(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k-1}x^k.$$

如果 1、2^{n+1} 是多项式 $g(x)$ 的根,证明:$f(x)$有一个小于 2^n 的正根.

5. 试求出所有由平面上有限个点构成的集合 S,使得对任意三个点 A、B、$C\in S$,总存在一点 $D\in S$,其与 A、B、C 三点构成一个平行四边形的四个顶点.

6. 已知 O 是不等边锐角$\triangle ABC$ 的外心,点 P 在$\triangle ABC$ 内,且满足

$$\angle PAB=\angle PBC,\angle PAC=\angle PCB,$$

点 Q 在直线 BC 上,且满足 $QA=QP$.

证明:$\angle AQP=2\angle OQB$.

参 考 答 案

1. 首先估计 m 的上界.

考虑集合

$$U=\{(i,\{T_j,T_k\})\mid i\in S_m,T_j\neq T_k,T_j、T_k\in\mathscr{T},\ i\in T_j\cap T_k\}.$$

由条件(3),知对 S_m 中的任意一个元素 i,有且仅有一对$\{T_j,T_k\}$,使$(i,\{T_j,T_k\})\in U$.

因此,$|U|=|S_m|=mn$.

另一方面,由条件(2),知$|T_j\cap T_k|\leqslant 1$,于是,$|U|\leqslant C_{2n}^2$.

故 $mn\leqslant C_{2n}^2=\frac{2n(2n-1)}{2}=n(2n-1)$,即 $m\leqslant 2n-1$.

利用归纳法构造一个 $m=2n-1$ 的例子.

对 $n=2,m=3,S_m=\{1,2,\cdots,6\}$,集族 $\mathscr{T}=\{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}$ 符合条件.

假设当 $n=k$ 时,

$S_{2k-1}=\{1,2,\cdots,(2k-1)k\}$,

$\mathscr{T}_k=\{T_1,T_2,\cdots,T_{2k}\}$

满足条件.

当 $n=k+1$ 时,$m=2k+1$,

$S_{2k+1}=\{1,2,\cdots,(2k-1)k,a_1,a_2,\cdots,a_{4k+1}\}$,

其中,$a_i=(2k-1)k+i(i=1,2,\cdots,4k+1)$.

令 $\mathscr{T}_{k+1}=\{T_1\cup\{a_1,a_2\},T_2\cup\{a_3,a_4\},\cdots,T_{2k}\cup\{a_{4k-1},a_{4k}\},T_{2k+1},T_{2k+2}\}$,

其中,$T_{2k+1}=\{a_1,a_3,\cdots,a_{4k+1}\}$,

$T_{2k+2}=\{a_2,a_4,\cdots,a_{4k+1}\}$.

经验证,集族$\mathscr{T}$符合条件.

故由归纳原理,知 $m=2n-1$ 可以取到.

综上,所求 m 的最大值为 $2n-1$.

2. 记$\triangle A_1A_2A_3$ 的外接圆$\odot O$ 半径为 R,$\angle A_3A_1A_2=\alpha,\angle A_1A_2A_3=\beta,\angle A_2A_3A_1=\gamma$.

如图 1,延长 A_1H,与$\odot O$ 交于点 H_1.

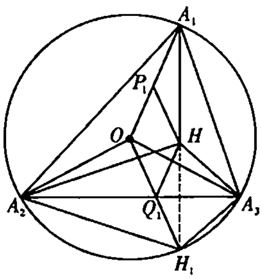


图 1

由 $A_2H\perp A_3A_1$,$A_1H\perp A_2A_3$

$\Rightarrow \angle A_3A_2H=\angle A_3A_1H=90°-\gamma$.

由 A_1、A_2、H_1、A_3 四点共圆知

$\angle A_3A_1H_1=\angle A_3A_2H_1$.

则$\angle A_3A_2H_1=\angle A_3A_2H$.

同理,$\angle A_2A_3H_1=\angle A_2A_3H$.

从而,四边形 $A_2H_1A_3H$ 是以直线 A_2A_3 为对称轴的轴对称图形. 故

$Q_1H=Q_1H_1$,$\angle Q_1HH_1=\angle Q_1H_1H$.

由 $Q_1H/\!/OA_1$,得

$\angle OA_1H_1=\angle Q_1HH_1=\angle Q_1H_1A_1$.

又$\angle OA_1H_1=\angle OH_1A_1$,则

$\angle OH_1A_1=\angle Q_1H_1A_1$.

注意到,点 O 和 Q_1 在 AH_1 的同侧,从而,O、Q_1、H_1 三点共线.

又由 $OP_1=Q_1H=Q_1H_1$,得

$$\frac{OQ_1}{OP_1}=\frac{OQ_1}{Q_1H_1}=\frac{S_{\triangle OA_2Q_1}}{S_{\triangle Q_1A_2H_1}}$$

$$=\frac{OA_2\sin\angle OA_2Q_1}{A_2H_1\sin\angle Q_1A_2H_1}$$

$$=\frac{R\sin\angle OA_2A_3}{A_2H_1\sin\angle A_3A_2H_1}$$

$$=\frac{R\cos\alpha}{2R\cos\beta\cdot\cos\gamma}=\frac{\cos\alpha}{2\cos\beta\cdot\cos\gamma}.$$

同理,$\dfrac{OQ_2}{OP_2}=\dfrac{\cos\beta}{2\cos\gamma\cdot\cos\alpha}$,

$$\frac{OQ_3}{OP_3}=\frac{\cos\gamma}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

于是,结论等价于

$$\frac{\cos\alpha}{2\cos\beta\cdot\cos\gamma}+\frac{\cos\beta}{2\cos\gamma\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\gamma}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta}\geqslant 3.$$

根据均值不等式知只需证明

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{8\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}}\geqslant 3,$$

即 $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\leqslant\dfrac{1}{8}$,显然.

3. 首先证明:多项式 $P(x)$ 不是好的当且仅当存在一个质数 q,使得对所有整数 k 均有 $q\mid P(k)$.

事实上,若存在一个这样的 q,则 $P(x)$ 不是好的.

反过来,设 k 为任意一个正整数,其所有质约数分别为 $q_1,q_2,\cdots,q_m$. 若对所有 q_i,存在 $x_i(\bmod q_i)$ 使得对 $a\equiv x_i(\bmod q_i)$,有 $q_i\nmid P(a)$,由中国剩余定理,知对所有

$z\equiv a(\bmod q_1q_2\cdots a_m)$,

均有 $(k,P(z))=1$.

考虑多项式 $P(x)$ 模 q_j 所得的余数,其中,q_j 是一个质数,可构造一个次数至多为 q_j-1 的多项式 $P_j(x)$,其与 $P(x)$ 模 q_j 所得的余数相同(由费马小定理,将 $P_j(x)$ 中 x^i 的系数取为 $P(x)$ 中形如 $x^l(l\equiv i(\bmod (q_j-1)))$ 的项的系数之和,并令 $P_j(x)$ 和 $P(x)$ 的常数项相等.

注意到,$P_j(x)\equiv 0(\bmod q_j)$ 至多有 q_j-1 个根,故存在 x_i 使得对 $a\equiv x_i(\bmod q_j)$,有 $q_j\nmid P(a)$. 因此,$P(x)$ 是好的当且仅当对所有质数 q_j,有 $P_j(x)\not\equiv 0(\bmod q_j)$.

当 $n\geqslant 3$ 时,任取一个系数为不大于 $n!$ 的正整数的 n 次多项式.

由 $P_1\equiv 0(\bmod 2)(q_1=2)$ 的概率为 $\dfrac{1}{4}$;

$P_2\equiv 0(\bmod 3)(q_2=3)$ 的概率为 $\dfrac{1}{27}$,故

$P_1\equiv 0(\bmod 2)$ 和 $P_2\equiv 0(\bmod 3)$

同时成立的概率为 $\dfrac{1}{4\times 27}$.

若质数 $q_j\leqslant n$,则所有的系数模 q_j 的余数相同. 于是,$P_j(x)\equiv 0(\bmod q_j)$ 的概率为

$$\frac{1}{q_j^{q_j}}\leqslant\frac{1}{q_j^4}(q_j>3).$$

若 $n<q_j\leqslant n!$,则 $P_j(x)=P(x)$. 于是,$P_j(x)\equiv 0(\bmod q_j)$ 当且仅当 $P_j(x)$ 的所有系数均可被 q_j 整除,其概率至多为 $\dfrac{1}{q_j^{n+1}}\leqslant\dfrac{1}{q_j^4}$.

若 $n!<q_j$,则

$P_j(x)=P(x)$,且 $P_j(x)\equiv 0(\bmod q_j)$

的概率为 0(因此时所有的系数均小于 q_j).

因此,一个任意的系数为不大于 $n!$ 的正整数的 n 次多项式是好的的概率不小于

$$1-\frac{1}{4}-\frac{1}{27}+\frac{1}{4\times27}-\sum_{k=5}^{n!}\frac{1}{k^4},$$

其中,不考虑[6,$n!$]内的合数.

注意到,

$$\frac{1}{(h+1)^4}\leqslant\frac{1}{3}\left[\frac{1}{h^3}-\frac{1}{(h+1)^3}\right]$$

即　$6h^2+4h+1>0$.

于是,上述多项式是好的的概率不小于

$$1-\frac{1}{4}-\frac{1}{27}+\frac{1}{4\times27}-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4^3}-\frac{1}{(n!)^3}\right]$$

$$\geqslant\frac{3}{4}\times\frac{26}{27}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4^3}\geqslant0.71.$$

故当 $n\geqslant3$ 时,至少有 71% 的系数为不大于 $n!$ 的正整数的 n 次多项式是好的.

当 $n=2$ 时,根据前面的结论知

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\times100\%=75\%$$

的系数为系数不大于 2 的正整数的二次多项式是好的.

当 $n=1$ 时,只可能 $P(x)=x+1$,显然是好的.

4. 注意到,

$$\sum_{j=0}^{n}f(2^j)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_k2^{kj}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}2^{kj}\right)a_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k-1}[(2^{n+1})^k-1]$$

$$=g(2^{n+1})-g(1)=0.$$

若存在某个 $k(k<n)$ 使得 $f(2^k)=0$,则问题解决.

否则,一定存在 i、$j(1\leqslant i、j\leqslant n)$ 使得 $f(2^i)f(2^j)<0$. 从而,在 2^i 与 2^j 之间必存在一个 $f(x)$ 的根.

5. 设集合 U 表示以所有给定点为顶点的三角形的集合. 显然,这是一个有限集.

因此,必存在三点 D、E、F,使得$\triangle DEF$ 是集合 U 中面积最大的三角形.

从而,给定的点都在以 D、E、F 为三边中点的$\triangle ABC$ 内(包含边界,如图 2).

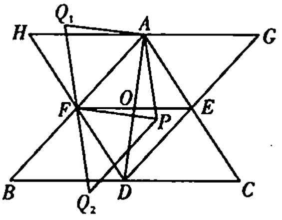


图 2

根据题意,知 A、B、C 中至少有一点在集合 S 中(与点 D、E、F 构成平行四边形). 不妨设 $A\in S$. 则四边形 $AEDF$ 是平行四边形,且$\triangle AEF$ 的面积也是最大的. 故集合 S 中的所有点同样在$\triangle DGH$ 内(包含边界),其中,A、E、F 分别是 HG、GD、DH 的中点. 从而,集合 S 中的所有点在$\square AEDF$ 内(包含边界).

下面证明:集合 S 中没有第五个点.

假设不同于点 A、E、D、F 的点 P 在集合 S 中,记 AD 与 EF 交于点 O,不妨设点 P 在$\triangle ODE$ 内(包含边界).

考虑点 A、F、P、$Q\in S$,且使得以 A、F、P、Q 为顶点的四边形是平行四边形.

不难得出点 Q 不在四边形 $AEDF$ 内.

事实上,线段 AP、FP 中至少有一条是该平行四边形的边(不妨设为 AP),则点 Q 可能有 Q_1 或 Q_2 两个位置,这两个点都在过点 F 且平行于 AP 的直线 l 上. 由

$$\angle Q_1FA=\angle FAP>0,$$

$$\angle Q_2FD=\angle PAE>0,$$

知除点 F 外的所有点均在$\square AEDF$ 外,矛盾.

从而,所求的 S 是由一个平行四边形的四个顶点构成的集合.

6. 如图 3，延长 AP，与 BC 交于点 M.

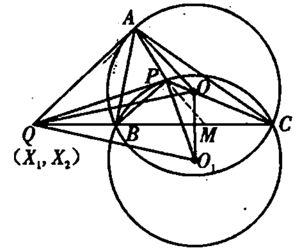


图 3

则$\triangle ABM \backsim \triangle BPM$，$\triangle ACM \backsim \triangle CPM$

$$\Rightarrow \left(\frac{BP}{BA}\right)^2=\frac{MP}{MA}=\left(\frac{CP}{CA}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{PB}{PC}. \qquad ①$$

记$\triangle ABC$、$\triangle PBC$ 的外接圆分别为$\odot O$、$\odot O_1$.

接下来证明：QA 与$\odot O$、QP 与$\odot O_1$ 分别相切.

在直线 BC 上取点 X_1、X_2，使得 X_1A 与$\odot O$、X_2P 与$\odot O_1$ 分别相切. 不妨设 $AB<AC$.

于是，由式①知 $PB<PC$.

从而，点 X_1、X_2 均在射线 CB 上，且

$X_1C>X_1B$，$X_2C>X_2B$.

由切割线定理得

$$\frac{X_1B}{X_1C}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2, \frac{X_2B}{X_2C}=\left(\frac{PB}{PC}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{X_1B}{X_1C}=\frac{X_2B}{X_2C}.$$

由 X_1、X_2、C、B 四点共线，知点 X_1 与 X_2 重合.

由圆幂定理得

$$X_1A^2=X_1B\cdot X_1C=X_2B\cdot X_2C$$
$$=X_2P^2=X_1P^2.$$

所以，点 X_1、X_2、Q 重合.

由$\angle BPC=180°-\angle CBP-\angle BCP$

$=180°-\angle BAC$，

知$\odot O_1$ 与$\odot O$ 关于直线 BC 对称.

故 $QO=QO_1$，且$\angle OQO_1=2\angle OQB$.

由 $QA=QP$，$QO=QO_1$，及

$\angle QAO=\angle QPO_1=90°$

$\Rightarrow \triangle QAO \cong \triangle QPO_1$

$\Rightarrow \angle AQO=\angle PQO_1$.

故$\angle AQP=\angle OQO_1=2\angle OQB$.

【注】也可以用反演变换说明 AQ 与$\odot O$、PQ 与$\odot O_1$ 分别相切.

如图 4，考虑以 P 为中心、任意长度 r 为半径的反演变换 I. 对任意元素 $\mathscr{P}$，记 $I(\mathscr{P})$ 或 $\mathscr{P}_1$ 为 $\mathscr{P}$ 在变换 I 下的像. 则 $I(BC)=\Gamma$ （$\triangle B_1C_1P$ 的外接圆）.

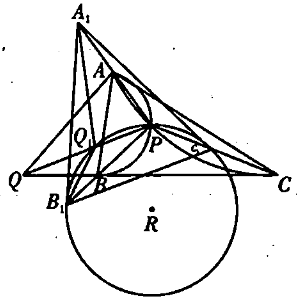


图 4

由$\angle PAB=\angle PBC$，知 BC 与$\triangle ABP$ 的外接圆切于点 B. 则圆 Γ 与直线 A_1B_1 相切. 类似地，圆 Γ 与 A_1C_1 也相切. 记圆 Γ 的圆心为 R，则 A_1R 是 B_1C_1 的垂直平分线.

由 Q、Q_1、A、A_1 四点共圆知

$\triangle AQP \backsim \triangle Q_1A_1P$，且 $A_1P=A_1Q_1$.

而点 Q 在 BC 上，则点 Q_1 也在圆 Γ 上.

于是，$RQ_1=RP$.

从而，四边形 $B_1C_1PQ_1$ 是一个位于等腰$\triangle A_1B_1C_1$ 中的等腰梯形，其中，$Q_1P /\!/ B_1C_1$.

从而. QP 与$\odot O_1$ 相切.

不难证明，$\triangle A_1Q_1P$ 和$\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圆内切于点 A_1，则 AQ 与$\odot O$ 相切.

（李 潜 翻译）

第七届罗蒙诺索夫奥林匹克

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2013)01－0036－02

决 赛

1. 在平面坐标系中，求不等式组

$$\begin{cases}\sqrt{1-x}+2x\geqslant 0,\\ -1-x^2\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{x}\end{cases}$$

的图像围成的面积.

2. 将一个球切(削)成一个正四棱锥，设四棱锥的底面边长为14，棱锥侧面底边上的高为12. 求此球的半径最小应是多少？

3. 解不等式

$$\log_5(5x^2+2x)\cdot\log_5\left(5+\frac{2}{x}\right)>\log_5 5x^2.$$

4. 两圆内切于点 K，大圆的弦 AB 与小圆切于点 L，且 $AL=10$. 若 $\frac{AK}{BK}=\frac{2}{5}$，求 BL.

5. 若方程 $x^5+2x^4+ax^2+bx=c$ 的实根的集合恰好由 -1、1 组成，求 a、b、c 的值.

6. 已知函数 $y=f(t)$，方程 $f(\sin x)=0$ 在区间 $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上的根的和等于 33π，而方程 $f(\cos x)=0$ 在区间 $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的根的和等于 23π. 求方程 $f(\cos x)=0$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上的根的和.

参 考 答 案

1. 不等式组中 x 的定义域为 $[0,1]$.

当 $x\in[0,1]$ 时，函数 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 互为反函数，其图形合起来的面积由条件

$$x\in[0,1],\ -1-x^2\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{x}$$

确定.

如图1，而其中有相同的部分组成. 因此，由 $x\in[0,1]$，$y\in[-2,2]$ 组成的长方形的面积等于所求图形的面积，即它等于4.

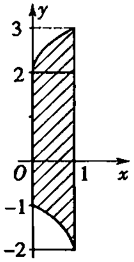


图1

2. 球的直径不能小于包含在它里面的棱锥底面正方形的对角线，其对角线长为 $14\sqrt{2}$.

因此，所求的球的半径不小于 $7\sqrt{2}$.

另一方面，以棱锥底面对角线的交点为球心、$7\sqrt{2}$ 为半径的球包含棱锥的顶点(因棱锥的高为 $h=\sqrt{144-49}=\sqrt{95}<7\sqrt{2}$)，故所求最小半径为 $7\sqrt{2}$.

3. $\log_5\left(5+\frac{2}{x}\right)\cdot\log_5(5x^2+2x)>\log_5 5x^2$

$$\Leftrightarrow \log_5\left(5+\frac{2}{x}\right)\cdot\log_5(5x^2+2x)$$

$$>1+\log_5(5x^2+2x)-\log_5\left(5+\frac{2}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\log_5\left(5+\frac{2}{x}\right)-1\right]\left[\log_5(5x^2+2x)+1\right]>0$$

$$\Leftrightarrow\left[\log_5\left(5+\frac{2}{x}\right)-\log_5 5\right]\left[\log_5(5x^2+2x)-\log_5\frac{1}{5}\right]>0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(5+\frac{2}{x}-5\right)\left(5x^2+2x-\frac{1}{5}\right)>0,\\5+\frac{2}{x}>0,\\5x^2+2x>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\left(x-\frac{-1+\sqrt{2}}{5}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{2}}{5}\right)}{x}>0,\\x\in\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)\cup(0,+\infty)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{5},-\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}-1}{5},+\infty\right).$$

4. 如图 2,作弦 PQ 及公切线 MN.

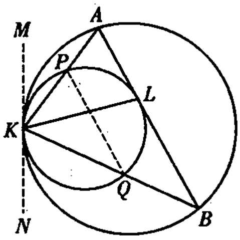


图 2

则$\angle PQK=\angle PKM=\angle ABK$.

所以,$PQ/\!/AB,\overset{\frown}{PL}=\overset{\frown}{QL}$.

因此,$\angle PKL=\angle QKL$,即 KL 是$\angle AKB$ 的角平分线.

由角平分线的性质知

$$\frac{AL}{BL}=\frac{AK}{BK}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow BL=10\times\frac{5}{2}=25.$$

5. -1 和 1 是方程

$$x^5+2x^4+ax^2+bx-c=0$$

的根,当且仅当参数 a、b、c 满足

$$\begin{cases}3+a+b-c=0,\\1+a-b-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-1,\\c=a+2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^5+2x^4+ax^2+bx-c$$
$$=(x^2-1)(x^3+2x^2+x+2+a).$$

多项式 $x^3+2x^2+x+2+a$ 至少有一个实根. 由题意得,它应等于 1 或 -1.

(1)若 $x=1$ 是根,则 $a=-6$. 于是,

$$x^3+2x^2+x+2+a=x^3+2x^2+x-4$$
$$=(x-1)(x^2+3x+4).$$

而三项式 x^2+3x+4 无实根,因此,$a=-6,c=-4$ 满足条件.

(2)若 $x=-1$ 是根,则 $a=2$. 于是,

$$x^3+2x^2+x+2+a=x^3+2x^2+x.$$

显然,x^3+2x^2+x 还有根 $x=0$,不满足条件.

6. 设方程 $f(\sin x)=0$ 在$\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$上有 k 个根 $x_1,x_2,\cdots,x_k$. 这意味着方程 $f(t)=0$ 在 $[-1,0]$ 上有 k 个根 $t_1,t_2,\cdots,t_k$.

因为 $\arcsin t_i\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$,所以,

$$x_i=2\pi+\arcsin t_i(i=1,2,\cdots,k).$$

故 $33\pi=x_1+x_2+\cdots+x_k$

$$=2\pi k+\arcsin t_1+\cdots+\arcsin t_k.$$

类似地,方程 $f(\cos x)=0$ 在$\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$上同样有 k 个根

$$y_i=2\pi-\arccos t_i(i=1,2,\cdots,k).$$

因为 $\arccos t_i\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$,所以,

$$23\pi=y_1+y_2+\cdots+y_k$$
$$=2\pi k-\arccos t_1-\cdots-\arccos t_k.$$

由上述两个等式得

$$\arcsin t_1+\arcsin t_2+\cdots+\arcsin t_k+\arccos t_1+\arccos t_2+\cdots+\arccos t_k=10\pi.$$

而 $\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2}k=10\pi$$
$$\Rightarrow k=20.$$

最后,在区间$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上,方程 $f(\cos x)=0$ 同样有 $k=20$ 个根

$$\arccos t_1,\arccos t_2,\cdots,\arccos t_{20},$$

且 $\arccos t_1+\arccos t_2+\cdots+\arccos t_{20}$

$$=2\pi k-23\pi=2\pi\times20-23\pi=17\pi.$$

(王玉怀　王亚红　提供)

课外训练

数学奥林匹克初中训练题(161)

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2013)01-0038-04

第一试

一、选择题(每小题7分,共42分)

1. 某计算机系统在同一时间只能执行一项任务,且完成该任务后才能执行下一项任务. 现有三项任务 U、V、W 的时间分别为 10 s,120 s 和 900 s,一项任务的相对等待时间为提交任务到完成该任务的时间与计算机系统执行该任务的时间之比. 则下面四种执行顺序中使三项任务相对等待时间之和最小的执行是(　　).

(A) U、V、W　　(B) V、W、U

(C) W、U、V　　(D) U、W、V

2. 如图1,C、D 是线段 AB 上两点,已知图中所有线段的长度都是正整数,且总和为 29. 则 AB =(　　).

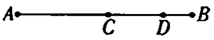


图1

(A)7　(B)9　(C)11　(D)13

3. 如图2,在菱形纸片 $ABCD$ 中,已知 $\angle A=60°$,将纸片折叠让点 A、D 分别落在点 A'、D' 处,且 $A'D'$ 经过点 B,EF 为折痕. 当 $D'F\perp CD$ 时,$\frac{CF}{FD}$=(　　).

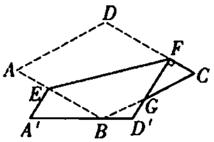


图2

(A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(C) $\frac{2\sqrt{3}-1}{6}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}+1}{8}$

4. 如图3,以点 $M(-5,0)$ 为圆心、4 为半径的圆与 x 轴交于 A、B 两点,P 是 $\odot M$ 上异于 A、B 的一动点,直线 PA、PB 分别与 y 轴交于点 C、D,以 CD 为直径的 $\odot N$ 与 x 轴交于点 E、F. 则 EF=(　　).

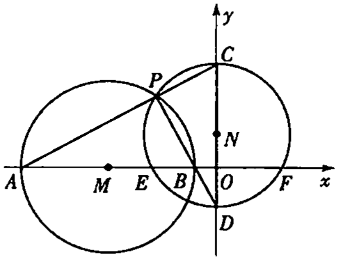


图3

(A) $4\sqrt{2}$　　(B) $4\sqrt{3}$　　(C) 6

(D) 以上均不对

5. 对任意两两不等的三个实数 a、b、c,下列五个等式中,正确的有(　　)个.

① $\frac{(a+b+c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c+a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a+b)^2}{(c-b)(a-b)}=0$;

② $\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(c-b)(a-b)}=4$;

③ $\frac{(a+b)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c)^2}{(b-a)(c-a)}+$

$$\frac{(c+a)^2}{(c-b)(a-b)}=1;$$

④ $\frac{(a+b-2c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c-2a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a-2b)^2}{(c-b)(a-b)}=9$;

⑤ $\frac{(a+b+2c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c+2a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a+2b)^2}{(c-b)(a-b)}=1$.

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

6. 如图 4, 设 $AC=1$, $PA=2$, M 是劣弧 $\overset{\frown}{CAB}$ 的中点, 且 $MP\perp AB$ 于点 P. 则 $PB=$( ).

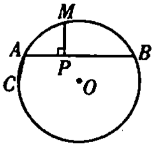


图 4

(A)5 (B)4

(C)3 (D)$\sqrt{3}+1$

二、填空题(每小题 7 分, 共 28 分)

1. 设方程组

$$\begin{cases}x^3-xyz=-5,\\ y^3-xyz=2,\\ z^3-xyz=21\end{cases}$$

的正实数解为 (x,y,z).

则 $x+y+z=$______.

2. 如图 5, 已知 AB 为 $\odot O$ 的直径, CD 平分 $\angle ACB$, 与 $\odot O$ 交于点 D, AB 与 CD 交于点 E. 若 $AC+BC=14$, 则 CE 的最大值为______.

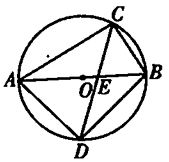


图 5

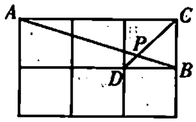


图 6

3. 如图 6, 在边长相同的小正方形组成的网格中, 点 A、B、C、D 都在这些小正方形的顶点上, AB 与 CD 交于点 P. 则 $\tan\angle APD=$______.

4. 已知四位数 $\overline{abcd}$ 满足

$\overline{abcd}=(\overline{ab}+\overline{cd})^2$,

其中, c 可以为 0. 则 $\overline{abcd}=$______.

第二试

一、(20 分) 设二次函数

$y=ax^2+bx+c$ (a、b、$c\in\mathbf{Z}$, 且 $a\neq0$),

对一切实数 x 恒有 $x\leqslant y\leqslant 2x^2+\frac{1}{4}$. 求二次函数的解析式.

二、(25 分) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 已知 AB 上的高 CE 与 AC 上的高 BD 交于点 H, 以 DE 为直径的圆与 AB、AC 分别交于点 F、G, FG 与 AH 交于点 K. 设 $BC=25$, $BD=20$, $BE=7$. 求 AK 的长.

三、(25 分) 试将七个数字 3, 4, …, 9 分成两组, 分别组成一个三位数和一个四位数, 并且使这两个数的乘积最大. 试问: 应该如何排列? 证明你的结论.

参考答案

第一试

一、1. A.

顺序 A 三项任务相对等待时间之和为

$$S_A=\frac{10}{10}+\frac{10+120}{120}+\frac{10+120+900}{900}<6;$$

顺序 B 三项任务相对等待时间之和为

$$S_B>\frac{10+120+900}{10}>90;$$

顺序 C 三项任务相对等待时间之和为

$$S_C>\frac{10+900}{10}>90;$$

顺序 D 三项任务相对等待时间之和为

$$S_D>\frac{10+120+900}{120}>8.$$

比较知 S_A 最小.

2. B.

设 $AC=a,CD=b,DB=c$. 则

$3a+4b+3c=29$

$\Rightarrow a+b+c=\frac{29-b}{3}(1\leqslant b\leqslant 6)$

$\Rightarrow (a+c,b)=(7,2),(3,5)$(舍去).

故 $AB=a+b+c=7+2=9$.

3. A.

设 $AB=1,CF=x$.

根据折叠的性质得

$\angle A'EB=\angle D'FM=90°$,

$\angle A'=\angle C=60°,BD'=D'G$

$\Rightarrow CF+FG=A'B=2A'E=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$

$\Rightarrow (\sqrt{3}+1)x=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$

$\Rightarrow \frac{CF}{FD}=\frac{x}{1-x}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

4. C.

易知,$\mathrm{Rt}\triangle OBD\backsim\mathrm{Rt}\triangle OCA$.

故$\frac{OC}{OB}=\frac{OA}{OD}$,即 $OC\cdot OD=9$.

由垂径定理得 $OE^2=OC\cdot OD=9$.

因此,$EF=2OE=6$.

5. D.

注意到,

$\frac{(a+b-kc)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+a-ka)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a-kb)^2}{(c-b)(c-a)}$

$=(k+1)^2$.

取 $k=-1,1,0,2,-2$,知五式都成立.

6. C.

在弧$\overset{\frown}{BM}$上取点 H,使$\overset{\frown}{BH}=\overset{\frown}{AM}$.

作 $GH\perp AB$ 于点 G. 由题设知

$\overset{\frown}{CA}+\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MH}+\overset{\frown}{HB}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{MH}$

$\Rightarrow PG=MH=AC=1$.

故 $PB=PG+GB=AC+AP=3$.

二、**1.** 6 .

令 $xyz=u$. 则

$u^3=x^3y^3z^3=(u-5)(u+2)(u+21)$

$=u^3+18u^2-73u-210$

$\Rightarrow 18u^2-73u-210=0$

$\Rightarrow u=6$ 或 $-\frac{35}{18}$(舍去).

当 $u=6$ 时,$x=1,y=2,z=3$,故

$x+y+z=6$.

2. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

设 $AC=x$. 则 $BC=14-x$. 过点 E 作 $EG\perp AC,EH\perp BC$,垂足分别为 G、H. 则

$EG=EH,CE=\sqrt{2}EG$.

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACE}+S_{\triangle BCE}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AC\cdot EG+\frac{1}{2}BC\cdot EH$.

则 $CE=\frac{\sqrt{2}AC\cdot BC}{AC+BC}=\frac{\sqrt{2}x(14-x)}{14}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{14}(x-7)^2+\frac{7\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

所以,CE 的最大值为$\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

3. 2.

如图 7,联结 BE,与 CD 交于点 F. 易知,

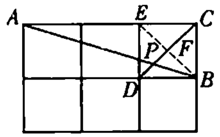


图7

$DF=CF$

$=BF=EF$.

又$\frac{DP}{CP}=\frac{BD}{AC}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow DP=PF=\frac{1}{2}CF=\frac{1}{2}BF$.

故 $\tan\angle APD=\tan\angle BPF=\dfrac{BF}{PF}=2.$

4.9 801 或 2 025 或 3 025.

设 $x=\overline{ab}, y=\overline{cd}$. 则

$100x+y=(x+y)^2.$

故 $x^2+(2y-100)x+(y^2-y)=0$ 有整数解.

由 $10<x<100$, 知 $y\neq0$.

则 $\Delta_x=(2y-100)^2-4(y^2-y)$

$=4(2\,500-99y)$

为完全平方数.

设 $2\,500-99y=t^2$. 则

$99y=(50+t)(50-t).$

注意到,

$0\leqslant50-t<50+t,$

$(50-t)+(50+t)=100,$

且其中有一个 11 的倍数,故只能是

$50-t=1$ 或 45.

相应地得 $y=1$ 或 25.

代入解得

$\begin{cases}x=98,\\y=1;\end{cases}\begin{cases}x=20,\\y=25;\end{cases}\begin{cases}x=30,\\y=25.\end{cases}$

故所求的四位数为

9 801 或 2 025 或 3 025.

第二试

一、由题设,知对一切实数 x 有

$x\leqslant ax^2+bx+c\leqslant2x^2+\dfrac14.$

当 $x=0$ 时,上式为

$0\leqslant c\leqslant\dfrac14,\Rightarrow c=0.$

故 $\begin{cases}ax^2+(b-1)x\geqslant0, & ①\\(2-a)x^2-bx+\dfrac14\geqslant0 & ②\end{cases}$

对一切实数 x 均成立.

由式①得

$a>0$, 且 $\Delta_1=(b-1)^2\leqslant0\Rightarrow b=1.$

当 $a=2$ 时,式②化为 $-x+\dfrac14\geqslant0$, 与题设矛盾.

当 $a\neq2$ 时,由式②得

$\begin{cases}2-a>0,\\\Delta_2=(-1)^2-4(2-a)\times\dfrac14\leqslant0\end{cases}$

$\Rightarrow a=1.$

所以,二次函数的解析式为 $y=x^2+x$

二、易知,

$\mathrm{Rt}\triangle ADB\backsim\mathrm{Rt}\triangle AEC$

$\Rightarrow\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{BD}{CE}=\dfrac{AB}{AC}.$

由题设知 $CD=15, CE=24.$

则 $\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AE+7}{AD+15}=\dfrac56.$

解得 $AD=15, AE=18.$

于是,D 是 $\triangle AEC$ 斜边 AC 的中点.

则 $DE=\dfrac12AC=15.$

如图 8,联结 DF.

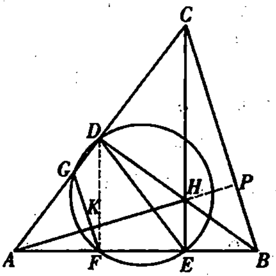


图 8

则 $\angle DFE=90^\circ.$

于是,$AF=\dfrac12AE=9.$

因为 $G、F、E、D$ 四点共圆,所以,

$\angle AFG=\angle ADE=\angle ABC.$

从而,$GF/\!/CB.$

延长 AH 与 BC 交于点 P.

则 $\dfrac{AK}{AP}=\dfrac{AF}{AB}.$ ①

数学奥林匹克高中训练题(161)

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2013)01－0042－05

第一试

一、填空题(每小题8分，共64分)

1. 在锐角$\triangle ABC$中，

$\cos A+\cos B-\sin A-\sin B$

的取值范围是______.

2. 在图1的每个“□”中填上“－”或“＋”，使得任何连续三个数的和小于0. 则不同的填法共有______种.

□1□2□3□4□5□6□7□8□9

图1

3. 不全共线的向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$满足

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=t$.

则t______3(填“<”“>”或“＝”).

4. 在四面体$ABCD$中，已知$AB=CD=5$，$AC=BD=12$，$AD=BC=13$. 则四面体$ABCD$外接球的表面积是______.

5. 若对任意的$\triangle ABC$，只要$p+q=r(p、q\in\mathbf{R}_+)$，就有

$p\sin^2 A+q\sin^2 B>pq\sin^2 C$，

则正数r的取值范围是______.

6. 过双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a、b>0)$的左焦点$F$的直线$l$与双曲线$C$的右支交于点$P$，与圆$x^2+y^2=a^2$恰好切于线段$FP$的中点$M$. 则直线$l$的斜率为______.

7. 若$x>0,y>0$，且$x^2+y^2=1$，则

$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}$

的最小值是______.

8. 若n为正整数，则方程$n^x=x^n$的实数解的个数的所有可能值的和等于______.

因H是$\triangle ABC$的垂心，所以，$AP\perp BC$.

又$BA=BC$，则$AP=CE=24$.

由式①得$AK=\frac{AF\cdot AP}{AB}=\frac{216}{25}$.

三、显然，数值大的数码放在最高位上.

先考虑比较简单的情形.

设$a、b、c、d(a>b>c>d)$是自然数.

用$a、b、c、d$组成两个两位数，并且使它们的乘积最大. 最高位必是$a、b$，但下一位的排法有两种：

$10a+c、10b+d$或$10a+d、10b+c$.

由$(10a+c)(10b+d)-(10a+d)(10b+c)$

$=10ad+10bc-10ac-10bd$

$=10(a-b)(d-c)<0$，

知在较大的自然数a的后面放较小的自然数d，在较小的自然数b后面放较大的自然数c所得的乘积较大.

据上述结论，把9、8、7、6四个数字分成两组构成两个两位数时，96×87的乘积最大.

同理，考虑9、8、7、6、5、4六个数字组成两个三位数时964×875乘积最大.

最后考虑数字3的位置.

不妨先虚设一个数字0，当八个数字组成两个四位数时，$9\,640\times8\,753$乘积最大. 然后去掉虚设的0，组成一个三位数与一个四位数，964和8 753乘积最大.

(邹守文　安徽省南陵县春谷中学，241300)

二、解答题(共56分)

9.(16分)已知

$$f(x)=1-\frac{1}{x};g(x)=\frac{1}{1-x}.$$

若实数 a 满足对任意的 $x\neq0,1$,都有

$$|f(x)-g(x)|\geqslant a,$$

试确定 a 的最大值.

10.(20分)已知 $n\in\mathbf{N}, n\geqslant2$. 证明:

$$\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[n]{n}}}}<2.$$

11.(20分)设 a 为无理数,且 $0<a<1$. 证明:存在正整数 n,使得

$$na-[na]>a,$$

其中,$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

加　试

一、(40分)已知圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 E, $CD^2=CE\cdot CA$,点 M 在边 AB 上,且 $AM=AD$, ME 与 AD 交于点 N. 证明: $\angle ACB=\angle ACN$.

二、(40分)证明:对任意给定的正数 N,存在正数 M,使得对任意满足条件 $abc=1$ 的正实数 $a、b、c$,都有

$$\frac{M}{a+b+c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant N.$$

三、(50分)求所有的由实数构成的有限集合 A,使得 $0\in A$, $|A|\geqslant4$,且对 A 中的任意四个不同的元素 $x、y、z、t$ 都有 $xyz+t\in A$.

四、(50分)将 $n\times n$ 方格表的每个方格任意填入 $+1$ 或 -1,然后允许进行如下操作:每次任意选择一行(或列),将这一行(或列)中的数全部变号. 若无论开始时方格表的数怎样填,总能经过不超过 k 次操作,使得方格表每一行中所有数的和、每一列中所有数的和均非负. 试确定 k 的最小值 $f(n)$.

参考答案

第一试

一、1. $(-2,0)$.

由 $0<\angle A、\angle B、\angle C<\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2}<\angle A+\angle B<\pi$$

$$\Rightarrow\angle A>\frac{\pi}{2}-\angle B,\angle B>\frac{\pi}{2}-\angle A.$$

则 $0<\cos A<\sin B<1$,

$0<\cos B<\sin A<1$.

故 $-2<\cos A+\cos B-\sin A-\sin B<0$.

2. 35.

由题设,知任何连续三个数前面必有两个负号. 而任何两个正号之间至少隔着两个数,于是,一共至少填有6个负号.

记负号个数为 n.

若 $n=9$,有1种填法;

若 $n=8$,则3之前不能为正,有8种填法;

若 $n=7$,有 $C_7^2-4=17$ 种填法;

若 $n=6$,则前三个、中间三个、后三个中各恰有两个负号,一共有9种填法.

综上,一共有35种填法.

3. $t>3$.

注意到,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$$
$$\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2).$$

同理,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\leqslant\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{b}^2)$,

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\leqslant\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{c}^2).$$

则 $t^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2t\geqslant3t$.

所以,$t\geqslant3$.

又等号不成立,故 $t>3$.

4. 169π.

该四面体对棱中点连线与这两条棱垂直,过四面体的顶点作连线的平行线,可得三组平行线,这三组平行线交得一个长方体. 而该长方体的体对角线即为外接球的直径,由

勾股定理得

$$\frac{1}{2}(5^2+12^2+13^2)=4R^2.$$

故球的表面积是 $4\pi R^2=169\pi$.

5. $0<r\leqslant 1$.

设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、c. 则

$$p\sin^2 A+q\sin^2 B>pq\sin^2 C \quad ①$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{q}a^2+\frac{1}{p}b^2>c^2.$$

若 $r\leqslant 1$,则

$$\frac{1}{q}a^2+\frac{1}{p}b^2\geqslant(q+p)\left(\frac{1}{q}a^2+\frac{1}{p}b^2\right)$$

$$\geqslant(a+b)^2>c^2;$$

若 $r>1$,令 $p=q=\frac{r}{2}$.

当 $a=b$,$\angle C\to\pi$ 时,

$$\frac{a^2+b^2}{c^2}\to\frac{1}{2}<\frac{r}{2},$$

式①不成立.

综上,$0<r\leqslant 1$.

6. $\frac{1}{2}$.

设双曲线右焦点为 F_1,原点为 O. 则 OM 为 $\triangle PFF_1$ 的中位线.

由双曲线定义知

$$|FP|-|F_1P|=2a.$$

由 $FM=\sqrt{FO^2-OM^2}=\sqrt{c^2-a^2}=b$,则

$$|PF|=2b.$$

而 $2b-2a=2a\Rightarrow b=2a$.

于是,直线 l 的斜率为

$$k=\tan\angle PFO=\frac{a}{b}=\frac{1}{2}.$$

7. $2\sqrt{2}$.

由 $1=x^2+y^2\geqslant 2xy\Rightarrow\frac{1}{xy}\geqslant 2$.

则 $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}=\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{xy}}\geqslant 2\sqrt{2}$.

8. 6.

结合图像知

当 $n=1$ 时,方程只有一个解;

当 $n=2$ 时,方程有三个解;

当 $n=9$ 时,方程有两个解.

当 $x>0$ 时,将方程两边取对数得

$$x\ln n=n\ln x.$$

设 $F(x)=x\ln n-n\ln x$. 则

$$F'(x)=\ln n-\frac{n}{x}.$$

由此,知函数在 $(0,+\infty)$ 上为一个递增区间,或一减一增两个单调区间. 于是,在正数范围内方程 $F(x)=0$ 至多有两个实根.

综上,知所求的和为 6.

二、**9.** 注意到,

$$|f(x)-g(x)|\geqslant a$$

$$\Leftrightarrow\left|1-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right|\geqslant a$$

$$\Leftrightarrow\left|1-\frac{1}{x(1-x)}\right|\geqslant a$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x(1-x)}\leqslant 1-a \text{ 或 } \frac{1}{x(1-x)}\geqslant 1+a. \quad ①$$

首先,当 $a=1$ 时,式①的两个不等式中必有一个成立.

事实上,若 $x<0$ 或 $x>1$,则

$$\frac{1}{x(1-x)}<0=1-a;$$

若 $0<x<1$,则

$$x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{x(1-x)}\geqslant 4>1+a.$$

其次,当 $a>1$ 时,式①的两个不等式可能都不成立.

由前一个不等式解得

$$\frac{1-\sqrt{\frac{a+3}{a-1}}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{\frac{a+3}{a-1}}}{2}.$$

于是,当 $x<\frac{1-\sqrt{\frac{a+3}{a-1}}}{2}$ 时,式①的两个

不等式都不成立.

综上,a 的最大值是 1.

10. 考虑数列 $\{a_n\}$:

$a_1=2, a_{n+1}=a_n^{n+1}-(n+1)$.

首先证明:$a_n>n(n\geqslant 3)$. ①

事实上,因为 $a_1=2, a_2=2$,所以,

$a_3=a_2^3-3=5>3$.

假设当 $n=k(k\geqslant 3)$ 时,有 $a_k>k$.

当 $n=k+1$ 时,因为

$a_k^{k+1}>k^{k+1}>k^2\cdot k\geqslant 9k>2k+2$,

所以,$a_{k+1}=a_k^{k+1}-k-1>k+1$.

由数学归纳法知式①成立.

由式①得

$a_n=a_{n-1}^n-n>0$

$\Rightarrow a_{n-1}^n>n \Rightarrow a_{n-1}>\sqrt[n]{n}$.

故 $a_{n-2}^{n-1}-(n-1)>\sqrt[n]{n}$

$\Rightarrow a_{n-2}^{n-1}>(n-1)+\sqrt[n]{n}$

$\Rightarrow a_{n-2}>\sqrt[n-1]{n-1+\sqrt[n]{n}}$.

以此类推得

$$2=a_1>\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[n]{n}}}}.$$

11. 由题设知 $\frac{1}{1-a}$ 为正无理数.

于是,存在正整数 n 使得

$\frac{1}{1-a}<n<\frac{1}{1-a}+1$

$\Rightarrow 1<n(1-a)<2-a$

$\Rightarrow n-2<n-2+a<na<n-1$

$\Rightarrow [na]=n-2$.

又 $(n-1)a>n-2=[na]$,则

$na-[na]>a$.

加　试

一、因为 $CD^2=CE\cdot CA$,所以,

$\triangle CAD\backsim\triangle CDE$.

故 $\angle CAD=\angle CDE=\angle CDB=\angle CAB$.

又 $AD=AM, AE=AE$,则

$\triangle AME\cong\triangle ADE$.

从而,$\angle AMN=\angle ADB$.

故 $\triangle AMN\cong\triangle ADB\Rightarrow AB=AN$.

又 $AC=AC, \angle BAC=\angle CAN$,则

$\triangle BAC\cong\triangle NAC$

$\Rightarrow \angle ACB=\angle ACN$.

二、由

$(a-b)^2+(c-b)^2+(a-c)^2\geqslant 0$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

则 $(ab+bc+ca)\leqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2$.

令 $\frac{1}{a}=x, \frac{1}{b}=y, \frac{1}{c}=z$.

于是,所证不等式等价于

$\frac{M}{xy+yz+zx}+x+y+z\geqslant N$. ①

而 $\frac{M}{xy+yz+zx}+x+y+z$

$\geqslant\frac{M}{\frac{1}{3}(x+y+z)^2}+x+y+z$

$=\frac{3M}{(x+y+z)^2}+\frac{x+y+z}{2}+\frac{x+y+z}{2}$

$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}M}$.

取 $M\geqslant\frac{4}{81}N^3$,则 $3\sqrt[3]{\frac{3}{4}M}\geqslant N$.

从而,式①成立.

故所证不等式成立.

三、(1) $|A|=4$.

设 $A=\{a,b,c,0\}$,则由 $abc+0=abc\in A, abc\neq 0$,得 $abc=a,b$ 或 c.

由对称性,不妨设 $abc=a$.

因为 $a\neq 0$,所以,

$bc=1\Rightarrow c=\frac{1}{b}$.

故 $A=\left\{0,a,b,\frac{1}{b}\right\}$ (a、b 是非零实数,且

$b\neq\pm1,a\neq b,\frac{1}{b}\Big)$. 显然,集合 A 满足题设条件.

(2) $|A|\geqslant5$.

则集合 A 除 0 外还含有至少四个元素.

(i)若 A 中至少有四个正数,设 A 中最大元素为 d,且 a、b、$c\in A\cap\mathbf{R}_+$,则

$abc+d>d$,且 $abc+d\in A$,

这不可能.

(ii)若 A 中至少有四个负数,设 A 中的最小数是 a,且 b、c、$d\in A\cap\mathbf{R}_-$,则

$a+bcd<a$,且 $a+bcd\in A$,

这不可能.

(iii)若 A 中有不少于两个正数、两个负数,设 A 中最大元素为 d,且设 $a<0,b<0$,$0<c<d$,a、b、$c\in A$,则

$abc+d>d$,且 $abc+d\in A$,

这不可能.

(iv)若 A 中只有三个正数一个负数,设这四个数满足 $a<0<b<c<d$,则同(1)知 bc、cd、bd 中有且只有一个为 1. 不妨设 $cd=1$. 则

$a<bca<0$,且 $bca+0=bca\in A$,

这不可能.

(v)若 A 中只有三个负数一个正数,同(iv)可得矛盾.

综上,

$$A=\left\{0,a,b,\frac{1}{b}\right\}\Big(a、b\in\mathbf{R}_+,\text{且}$$

$$b\neq\pm1,a\neq b,\frac{1}{b}\Big).$$

四、若方格表每一行中所有数的和、每一列中所有数的和均非负,则称方格表具有"性质 p".

首先证明:$k\geqslant n$.

事实上,当开始时方格表中的数均为 -1 时,为使方格表具有性质 p,设对行进行了 x 次操作,对列进行了 y 次操作.

若 $x\geqslant n$,或 $y\geqslant n$,则结论成立;

若 $x<n$,且 $y<n$,则必有一行没有进行操作,从而,对列进行的操作不少于 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$次,即 $y\geqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

同理,$x\geqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

故 $k\geqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]\times2\geqslant n$.

其次,对方格表中同一行(或列)进行偶数次操作等价于没有对这一行(或列)进行操作,对方格表中同一行(或列)进行奇数次操作等价于对这一行(或列)进行了一次操作,因此,对方格表进行的不同操作有 2^{2n} 种.

接下来证明:这些操作结果中使方格表中所有数的和最大的方格表必具有性质 p.

若不然,设其中有一行(或列)中的数的和小于零. 则对这一行(或列)进行一次操作,得到的方格表中所有数的和变大,与假设矛盾.

这说明,能经过有限次操作使得方格表具有性质 p.

最后证明:可以经过不超过 n 次操作使得方格表具有性质 p.

由上面的论证,不妨设对 $s(0\leqslant s\leqslant n)$ 行进行操作,对 $t(0\leqslant t\leqslant n)$ 列进行操作可使方格表具有性质 p.

若 $s+t\leqslant n$,则结论成立;

若 $s+t>n$,则 $(n-s)+(n-t)<n$,并且对方格表中未进行操作的 $n-s$ 行与 $n-t$ 列都进行一次操作的结果与对前面 s 行 t 列进行操作的结果相同,于是,可以进行

$(n-s)+(n-t)<n$

次操作使方格表具有性质 p.

综上,$f(n)=n$.

(张利民 黑龙江省大庆市外国语学校,163453)

数学奥林匹克问题

本期问题

初 337 如图 1，已知 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，射线 AP、BP、CP 分别与边 BC、CA、AB 交于点 D、E、F. 若 $S_{\triangle ABC}=\lambda S_{\triangle DEF}$，试求 $\frac{PA}{PD}+\frac{PB}{PE}+\frac{PC}{PF}$ 的值（用 λ 的代数式表示）.

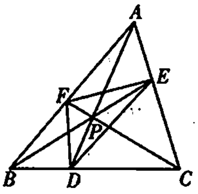


图 1

初 338 已知非零实数 a、b、c 满足

$$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=a^4.$$

求 $\frac{b}{c}-\frac{c}{b}$ 的最大值与最小值，并指出当 $\frac{b}{c}-\frac{c}{b}$ 取最大值与最小值时，$|a|:|b|:|c|$ 的值.

高 337 记 $x_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 证明：对于区间 $[x_0-1,x_0+1]$ 内的任意有理数 $\frac{p}{q}$（p、$q\in\mathbf{Z}$，且 $(p,q)=1$），都有

$$\left|\frac{p}{q}-x_0\right|\geqslant\frac{1}{(\sqrt{5}+1)q^2}.$$

高 338 设 a、b、c、d 是正实数. 证明：

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+15bcd}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+15cda}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+15dab}}+\sqrt{\frac{d^3}{d^3+15abc}}\geqslant 1.$$

上期问题解答

初 335 在黑板上从 1 开始写出一列连续的正整数，并从中擦去一个数后发现，余下的数的平均值为 $2\,013\frac{4}{503}$. 问：擦去的是哪个数？

解 设在 $1,2,\cdots,n$ 中擦去的数为 k. 则

$$2\,013\frac{4}{503}=\frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1}$$
$$\geqslant\frac{1+2+\cdots+n-n}{n-1}=\frac{n}{2},$$
$$2\,013\frac{4}{503}=\frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1}$$
$$\leqslant\frac{1+2+\cdots+n-1}{n-1}=\frac{n+2}{2}.$$

故 $4\,024\frac{8}{503}\leqslant n\leqslant 4\,026\frac{8}{503}$.

解得 $n=4\,025,4\,026$.

又 $503\mid(n-1)$，则 $n=4\,025$.

由 $2\,013\frac{4}{503}=\frac{1+2+\cdots+4\,025-k}{n-1}$，得 $k=1\,981$.

所以，擦去的数是 1 981.

（宋宝莹 天津师范大学《中等数学》编辑部，300387）

初 336 在凸四边形 $ABCD$ 中，已知 $\angle BAD=60°$，$\angle ABC=\angle ADC=90°$，$AC$ 与 BD 交于点 P，$BP=2$，$PD=4$. 求四边形 $ABCD$ 各边的长.

解　如图2,取 AC 的中点 O,联结 OB,作 $OM\perp BD$ 于点 M.

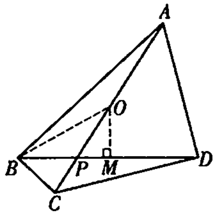


图2

由 $\angle ABC=\angle ADC=90°$,知 A、B、C、D 四点共圆,且 AC 为圆的直径,O 为圆心.

由垂径定理知

$$BM=MD=\frac{1}{2}BD=3.$$

由外心性质知

$$\angle BOM=\angle BAD=60°.$$

则 $\frac{OM}{OB}=\cos\angle BOM=\cos 60°=\frac{1}{2}$.

又 $\frac{PM}{BP}=\frac{1}{2}$,故

$$\frac{PM}{BP}=\frac{OM}{OB}$$

$\Rightarrow OP$ 平分 $\angle BOM$

$\Rightarrow \angle BOC=\angle POM=30°$

$\Rightarrow \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=15°$

$\Rightarrow \angle CAD=45°$

$\Rightarrow \triangle ACD$ 为等腰直角三角形

$\Rightarrow AC=\sqrt{2}AD=\sqrt{2}CD$.

注意到,

$$\frac{BM}{OB}=\sin\angle BOM=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow OB=\frac{2}{\sqrt{3}}BM=\frac{2}{\sqrt{3}}\times 3=2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AC=2OB=4\sqrt{3}.$$

则 $AD=CD=\frac{AC}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$.

由 $\angle CBP=\angle CBD=\angle CAD$
$=45°=\angle DBA$,
$\angle BCP=\angle BCA=\angle BDA$

$\Rightarrow \triangle BCP\backsim\triangle BDA$

$\Rightarrow \frac{BC}{BD}=\frac{BP}{BA}$

$\Rightarrow BC\cdot BA=BD\cdot BP=6\times 2=12.$

而 $BC^2+BA^2=AC^2=(4\sqrt{3})^2=48$,故

$(AB+BC)^2=72,(AB-BC)^2=24$

$\Rightarrow AB+BC=6\sqrt{2},AB-BC=2\sqrt{6}$

$\Rightarrow AB=3\sqrt{2}+\sqrt{6},BC=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$.

(黄全福　安徽省怀宁县江镇中学,246142)

高335　若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的内接 $\triangle ABC$ 以焦点 F 为重心,证明:

$$|\overrightarrow{FA}|^2+|\overrightarrow{FB}|^2+|\overrightarrow{FC}|^2=\frac{27}{8}p^2.$$

证明　设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$.

由 $\triangle ABC$ 的重心为焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=\frac{3p}{2},\\ y_1+y_2+y_3=0.\end{cases}$$

由对称性,不妨设 y_1、$y_2\geqslant 0$,$y_3<0$.

注意到,$y_i^2=2px_i(i=1,2,3)$.

故 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=\frac{3p}{2},\\ \sqrt{2px_1}+\sqrt{2px_2}-\sqrt{2px_3}=0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x_1+x_2-\frac{3p}{2}=-x_3.\\ \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{x_3}\end{cases}$

$\Rightarrow x_1x_2=\left(x_1+x_2-\frac{3}{4}p\right)^2.$

由 $x_1+x_2+x_3=\frac{3p}{2}$，知

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

$$=\frac{9p^2}{4}-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$

$$=\frac{9p^2}{4}-2x_1x_2-2(x_1+x_2)\left[\frac{3}{2}p-(x_1+x_2)\right]$$

$$=\frac{9p^2}{4}-2x_1x_2-3p(x_1+x_2)+2(x_1+x_2)^2$$

$$=\frac{9p^2}{4}-2\left[(x_1+x_2)^2-\frac{3}{2}p(x_1+x_2)+\frac{9}{16}p^2\right]-3p(x_1+x_2)+2(x_1+x_2)^2$$

$$=\frac{9}{8}p^2.$$

则 $|\overrightarrow{FA}|^2+|\overrightarrow{FB}|^2+|\overrightarrow{FC}|^2$

$$=\left(x_1+\frac{p}{2}\right)^2+\left(x_2+\frac{p}{2}\right)^2+\left(x_3+\frac{p}{2}\right)^2$$

$$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+p(x_1+x_2+x_3)+\frac{3}{4}p^2$$

$$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+\frac{9}{4}p^2$$

$$=\frac{9}{8}p^2+\frac{9}{4}p^2=\frac{27}{8}p^2.$$

（黄海波　安徽省合肥市第六中学，230001）

高 336　若严格递增整数数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1=1,a_n\mid a_{n+1}(n>1),$$

证明：任意正整数 N 可唯一表示为

$$N=\sum_{j=1}^{s}k_ja_j\left(0\leqslant k_j\leqslant\frac{a_{j+1}}{a_j}-1,k_s>0\right).$$

证明　首先用数学归纳法证明存在性.

当 $N=1$ 时，结论显然成立.

假设对一切 $N<m$ 存在性均成立，则当 $N=m$ 时，令

$$m=ka_j+r(0\leqslant r<a_j)$$

（显然，当 $n\to+\infty$ 时，$a_n\to+\infty$，再结合 $a_1=1$，知对任意正整数 m 必定存在唯一的下标 j，使得 $a_j\leqslant m<a_{j+1}$）.

若 $r=0$，则

$$m=ka_j\Rightarrow ka_j<a_{j+1}$$

$$\Rightarrow 0<k\leqslant\frac{a_{j+1}}{a_j}-1.$$

若 $r>0$，则由归纳假设知

$$m=ka_j+r=ka_j+\sum_{i=1}^{s}k_ia_i(a_j>a_s),$$

且　$ka_j<ka_j+r\leq a_{j+1}$

$$\Rightarrow 0<k\leqslant\frac{a_{j+1}}{a_j}-1.$$

综上，对任意正整数 N 存在性均成立.

其次证明唯一性.

若存在两种表示，即

$$N=\sum_{j=1}^{s}k_ja_j=\sum_{j=1}^{t}l_ja_j,$$

可设 $0<s\leqslant t$，且 t 为其中最小的.

若 $0<s<t$，则

$$N\leqslant\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{a_{j+1}}{a_j}-1\right)a_j=a_{s+1}-1$$

$$<a_t\leqslant\sum_{j=1}^{t}l_ja_j=N,$$

矛盾.

故 $0<s=t$，即

$$N=\sum_{j=1}^{s}k_ja_j=\sum_{j=1}^{s}l_ja_j.$$

再设 $0<k_s\leqslant l_s$.

若 $0<k_s<l_s$，则

$$\sum_{j=1}^{s-1}k_ja_j=\sum_{j=1}^{s}m_ja_j,$$

其中，$m_j=l_j(1\leqslant j<s)$，$m_s=l_s-k_s>0$，同上导出矛盾.

故 $0<k_s=l_s$.

于是，$\sum_{j=1}^{s-1}k_ja_j=\sum_{j=1}^{s-1}l_ja_j$.

这与 t 的最小性矛盾.

故唯一性成立.

（徐智勇　扬州大学附属中学东部分校，225000）

中等数学售书目录

代　码	书　名	邮购价	代　码	书　名	邮购价
HDBX09	2009 下半年合订本	36	YGTS	数学眼光透视	43
HDBS11	2011 上半年合订本	36	SXLW	数学思想领悟	43
HDBQ11	2011 全年合订本	70	PJCS03	椭圆函数与模函数	33
HDBS12	2012 上半年合订本	40	PJCS05	成功连贯理论与约当块理论	23
HDBX12	2012 下半年合订本	40	PJCS10	哈尔测度	33
HDBQ12	2012 全年合订本	80	PJCS11	李普希兹条件	23
ZKA10	2010 全国高中联赛模拟题集萃	15	PJCS14	麦卡锡函数和阿克曼函数	23
ZKA12	2012 全国高中联赛模拟题集萃	25	PJCS18	斯坦因豪斯问题	23
SXWH	数学奥林匹克与数学文化	53	PJCS20	代数几何中的贝祖定理	23
ZKB05	2003—2004 国内外数学竞赛题及精解	23	PJCS08	贝蒂定理与拉姆贝克—莫斯尔定理	23
ZKB06	2004—2005 国内外数学竞赛题及精解	23	PJCS17	纽结理论中的亚历山大多项式与琼斯多项式	33
ZKB09	2007—2008 国内外数学竞赛题及精解	36	DCDDS	世界数学奥林匹克解题大辞典·代数卷	80
ZKB10	2008—2009 国内外数学竞赛题及精解	36	DCDJH	世界数学奥林匹克解题大辞典·几何卷	76
ZKB11	2009—2010 国内外数学竞赛题及精解	36	DCDZH	世界数学奥林匹克解题大辞典·组合卷	66
ZKB12	2010—2011 国内外数学竞赛题及精解	36	DCDSL	世界数学奥林匹克解题大辞典·数论卷	66
AIMEHB	美国数学邀请赛试题汇编（2001—2011）	30	DCDXZ	世界数学奥林匹克解题大辞典·选择题卷	75
IMO48	2004—2008 走向 IMO·数学奥林匹克试题集锦	60	DCD	世界数学奥林匹克解题大辞典·全套	317
IMO09	2009 走向 IMO·数学奥林匹克试题集锦	23	SLHB	苏联中学生数学奥林匹克试题汇编（1961—1992）	45
IMO10	2010 走向 IMO·数学奥林匹克试题集锦	25	JNDHB	历届加拿大数学奥林匹克试题集	43
IMO11	2011 走向 IMO·数学奥林匹克试题集锦	23	DJTG	历届美国数学奥林匹克试题集：多解推广加强	43
IMO12	2012 走向 IMO·数学奥林匹克试题集锦	25	BKSC12	2012 高中数学联赛备考手册	23

欲购以上书或购买《中等数学》过刊的读者请登陆编辑部网站：zdsx. tjnu. edu. cn
发行部地址：天津市河西区吴家窑大街 57 号增 1 号　　　邮编：300074
联系电话：022－23542233 15822631163

本刊编辑部