А.НЯМРИНЧИНГИЙН НЭРЭМЖИТ ТӨВИЙН БҮСИЙН МАТЕМАТИКИЙН АРВАНДӨРӨВДҮГЭЭР ОЛИМПИАД

Энэхүү товхимолыг доктор (Ph.D), дэд проф В.Адъяасүрэн,
доктор (Ph.D), дэд проф Б.Сандагдорж, доктор (Ph.D), дэд проф
А.Алтангэрэл нар эрхлэн хэвлүүлэв.

Улаанбаатар 2015

А.Нямринчингийн нэрэмжит төвийн бүсийн математикийн арван дөрөвдүгээр олимпиадад хандив өргөсөн хамт олон, хувь хүмүүс

1. Архангай аймгийн ЗДТГазар 930000₮, Боловсрол соёлын газар 300000₮.

2. Архангай 2-р сургууль 100000₮, Хөвсгөл ЭДЦС 100000₮, Архангай 4-р сургууль 90000₮, Хөвсгөл ДМЦС 100000₮, Архангай 3-р сургууль 100000₮, Дархан-Уул аймгийн баг 90000₮, Орхон аймгийн баг 100000₮.

3. Н.Мөнхбат 1000000₮, Н.Түмэн-Од 900000₮, Б. Лхагвабаяр /1987/ 500000₮, Б. Баасандорж /1991 МУИС/100000₮, Ж.Батбаяр /1995/ 100000₮, С.Баярсайхан /ШУТИС/ 100000₮, П.Нямцэцэг /1993/ 250000₮, Ё.Дандарваанчиг 100000₮, Н.Амарсайхан /1986/ 50000₮, Б.Ганзориг /1989/ 100000₮, Б.Банзрагч 20000₮, Ж.Уламбаяр 100000₮, Г.Эрдэнэболд, С.Шүрэнцэцэг 100000₮, Ж.Батболд/1980/ 50000₮, Х.Хүрэлбаатар /1986/ 100000₮.

4. В.Адъяасүрэн, Б.Сандагдорж, А.Алтангэрэл 450000₮-өөр арван дөрөвдүгээр олимпиадын товхимолыг хэвлүүлж олимпиадад оролцогчдод болон хандив өгсөн хамт олонд бэлэглэв.

А.Нямринчингийн нэрэмжит төвийн бүсийн математикийн арван дөрөвдүгээр олимпиад

Нэрт сурган хүмүүжүүлэгч А.Нямринчингийн нэрэмжит математикийн XIV олимпиад Архангай аймгийн Эрдэнэбулган сумын лаборатори-хүмүүн 1-р сургууль дээр 2014 оны 10-р сарын 10-12 өдрүүдэд явагдав.

Энэ олимпиадад Архангай аймгийн I, II, III, IV сургуулийн багууд, Батцэнгэл Булган, Ихтамир, Жаргалант, Өндөр-Улаан Тариат, Төвшрүүлэх, Хайрхан, Хангай, Хотонт, Цахир, Цэнхэр, Цэцэрлэг, Чулуут, Эрдэнэмандал сумдын багууд, Өндөрсант, Мөрөн багийн багууд, Баянхонгор аймгийн баг, Дархан-Уул аймгийн 2 баг, Дорноговь аймгийн баг, Дундговь аймгийн 2 баг, Замын-Үүд баг, Орхон аймгийн 2 баг, Өвөрхангай аймгийн 2 баг, Хөвсгөл аймгийн 3 баг оролцов.

Олимдиадад VII-XII ангийн сурагчид оролцож оюун ухаанаа сорин уралдсаны зэрэгцээ математикийн багш нарт хоёр өдрийн сургалт семинар явуулав.

Олимпиадад багийн дүнгээр Архангай аймгийн "Хүмүүн-I" баг I байр, Дундговь баг II байр, Өвөрхангай "Мэргэд" баг III байр тус тус эзлэв.

Олимпиадын хүрээнд багийн тэмцээн явагдаж, 12 баг оролцсоноос "Баянхонгор" баг I байр, "Орхон-I" баг II байр, "Хөвсгөл-I" баг III байр тус тус эзлэв.

Олимпиадыг В.Адъяасүрэн, С.Өлзийсайхан, Ж.Уламбаяр, З.Бат-Эрдэнэ, Д.Даянцолмон, Б.Санчир, Ц.Батболд, А.Нямринчингийн хүү Н.Одбаяр, бэр Д.Дашням нар зохион байгуулж явуулав.

Энэхүү олимпиадыг зохион байгуулахад санхүүгийн туслалцаа үзүүлсэн Засаг даргын тамгын газар, Боловсрол соёлын төв, Сургууль хамт олон болон хандив өргөсөн бусад хувь хүмүүст олимдиадыг зохион байгуулагчдын нэрийн өмнөөс талархал илэрхийлье.

А.Нямринчингийн нэрэмжит олимпиад явагдсан энэхүү 15 жилийн хугацаанд 18 сурагч Улсын математикийн олимпиадаас медаль хүртсэн ба тэднээс Б.Сумъяа 1 алт, 2 мөнгөн медаль, Б.Лувсанбямба 1 алт, 2 мөнгө, Д.Өсөхбаатар мөнгө, хүрэл, Д.Түвшинтөр мөнгө, хүрэл, Ж.Энхбаяр мөнгө, хүрэл, Б.Энхбаяр

2 хүрэл медаль хүртсэний зэрэгцээ Б.Сумъяа ОУМО-аас хүрэл, мөнгөн медаль, Б.Лувсанбямба ОУМО-аас хос хүрэл медаль хүртсэн байна. Энэ нь олимпиадыг зохион байгуулахад идэвх зүтгэлтэй оролцсон хүмүүс, хамт олон, байгууллага, сурагчдыг бэлтгэж олимпиадад ач холбогдол өгч тогтмол оролцож ирсэн багш нарын ач гавъяа юмаа.

Та нарт баярлан талархсанаа илэрхийлж, цаашдын ажил хөдөлмөрт тань өндөр амжилт хүсье.

"А.Нямринчин" сангаас энэхүү олимпиадад оролцсон сурагчдаас УМО-ын эцсийн давааанд оролцож медаль авсан сурагч, бэлтгэсэн багшийг урамшуулах болзол гаргасан билээ.

Баянхонгор аймгийн Х ангийн сурагч М.Буянбилэг УМО-аас "Мөнгөн медаль" хүртэж сангаас зарласан байдлыг хангасан тул өргөмжлөл 200000 төгрөгөөр, бэлтгэсэн багш С.Цагааныг мөн өргөмжлөл 200000 төгрөгөөр, Хөвсгөл аймгийн Дэлгэрмөрөн цогцолбор сургуулийн сурагч Х.Санжаахүү УМО-аас "Хүрэл медаль" хүртэж сангаас зарласан болзлыг хангасан тул өргөмжлөл 100000 төгрөгөөр, бэлтгэсэн багш П.Сүхбатыг мөн өргөмжлөл 100000 төгрөгөөр шагнаж урамшуулав.

А.Нямринчингийн нэрэмжит төвийн бүсийн
математикийн XIV олимпиадын дүн

Анги	Нэр, аймаг, сургууль	медаль	Багш
VII	М.Номин-Эрдэнэ (Өв.Мэргэд)	алт	Б.Даарийбаамоо
	Б.Баасанжаргал (Ар.1-р сургууль)	мөнгө	Ж.Эрдэнэцэцэг
	П.Мичидмаа (Хөв.ЭД)	хүрэл	М.Ганболд
VIII	В.Даансран (БХ.Алго)	алт	С.Цагаан
	С.Энхжин (Ду.4-р сур)	мөнгө	Д.Бямбасүрэн
	О.Мөнх-Эрдэнэ (Ар.Батцэнгэл)	хүрэл	Х.Баяржаргал
IX	Г.Дашням (Ду.4-р сур)	алт	Д.Энхболд
	Т.Төгөлдөр (Ар.1-р сургууль)	мөнгө	Ж.Эрдэнэцэцэг
	Б.Сумъяацэрэн (Ор.Мон-турк)	хүрэл	Ж.Ганбаатар
X	М.Буянбилэг (БХ.Алгоритм)	алт	С.Цагаан
	Д.Баянжаргал (Өв.Мэргэд)	мөнгө	Б.Даарийбаамоо
	Б.Цэрэнлхам (Ар.1-р сургууль)	хүрэл	Ж.Эрдэнэцэцэг
XI	Ц.Энхбаатар (Хөв.ЭДЦС)	алт	Д.Эрдэнэтуяа
	Э.Жамбиймолом (Ар.1-р сургууль)	мөнгө	Ж.Эрдэнэцэцэг
	Ж.Нямдаваа (Орхон.Эрдэм)	хүрэл	С.Бальдармаа
XII	С.Мягмарсүрэн (Өв.Мэргэд)	алт	Батжаргал
	Д.Оюунтөгс (Хөв.ЭД)	мөнгө	М.Ганболд
	Б.Энхзаяа(Ду -р сур)	хүрэл	Д.Бямбасүрэн

А.Нямринчингийн нэрэмжит төвийн бүсийн математикийн олимпиадад оролцогчдоос улс болон олон улсын математикийн олимпиадаас медаль хүртсэн сурагчид

1. Өвөрхангай аймгийн Хархорин сумын МГСС-ийн 9-р ангийн сурагч Н.Батболд. Бэлтгэсэн багш М.Сугар (2004 он)
   - Улсын математикийн 40-р олимпиадаас Мөнгөн медаль

2. Хөвсгөл аймгийн Дэлгэрмөрөн цогцолбор сургуулийн 7-р ангийн сурагч Б.Сумъяа. Бэлтгэсэн багш Б.Ганбилэг (2004 он)
   - Улсын математикийн 40-р олимпиадаас Мөнгөн медаль (анги өгсөж оролцсон)
   - Улсын математикийн 42-р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**
   - Улсын математикийн 43-р олимпиадаас **Алтан медаль**
   - Олон улсын математикийн 47-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**
   - Олон улсын математикийн 48-р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**
   - И.Ф.Шарыгины нэрэмжит Олон Улсын Олимпиадаас хамгийн хүнд бодлогыг бодож **“Тусгай”** шагнал хүртсэн
   - Монголын Оюутны математикийн 17-р олимпиадаас **Алтан медаль**

3. Өвөрхангай аймгийн “Мэргэд” сургуулийн 11-р ангийн сурагч Б.Баярдэлгэр. Бэлтгэсэн багш П.Дайрийбаамоо (2006 он)
   - Улсын математикийн 42-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**

4. Өвөрхангай аймгийн “Мэргэд” сургуулийн 9-р ангийн сурагч Б.Лувсанбямба. Бэлтгэсэн багш Ч.Нарантуяа (2007 он)
   - Улсын математикийн 43-р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**
   - Улсын математикийн 45-р олимпиадаас **Алтан медаль**
   - Улсын математикийн 46-р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**
   - Олон улсын математикийн 50-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**
   - Олон улсын математикийн 51-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**
   - Монголын Оюутны математикийн 20–р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**

5. Хөвсгөл аймгийн МГСС-ийн 11-р ангийн сурагч Б.Цэнд-Аюуш. Бэлтгэсэн багш Б.Түмэндэмбэрэл (2007 он)
   - Улсын математикийн 43-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**
   - Монголын Оюутны математикийн 17-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**

6. Хөвсгөл аймгийн МГСС-ийн 10-р ангийн сурагч Д.Өсөхбаатар. Бэлтгэсэн багш М.Сайнбаяр (2008, 2009 он)
   - Улсын математикийн 44-р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**
   - Улсын математикийн 45-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**
   - Мэдээлэл зүйн улсын олимпиадаас **Хүрэл медаль**
   - Мэдээлэл зүйн олон улсын олимпиадад оролцсон

7. Дархан-Уул аймгийн “Оюуны ирээдүй” цогцолбор сургуулийн 11-р ангийн сурагч Б.Ганбат. Бэлтгэсэн багш Ч.Оюунгэрэл (2009 он)
   - Улсын математикийн 45-р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**
   - Оюутны математикийн 19-р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**
   - Олон улсын оюутны математикийн 17-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**
   - Олон улсын оюутны математикийн 18-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**
   - Олон улсын оюутны математикийн 19-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**

8. Дархан-Уул аймгийн “Оюуны ирээдүй” цогцолбор сургуулийн 8-р ангийн сурагч Х.Ариунболд. Бэлтгэсэн багш Т.Алтанцэцэг (2009 он)
   - Улсын математикийн 45-р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**

9. Хөвсгөл аймгийн Дэлгэрмөрөн цогцолбор сургуулийн 8-р ангийн сурагч Б.Зоригтбаатар. Бэлтгэсэн багш Г.Адъяахүү (2009 он)
   - Улсын математикийн 45-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**
   - Оюутны математикийн 22-р олимпиадаас **Алтан медаль**

10. Хөвсгөл аймгийн Дэлгэрмөрөн цогцолбор сургуулийн 11-р ангийн сурагч Н.Мөнхжаргал. Бэлтгэсэн багш Г.Адъяахүү (2009 он)
    - Улсын математикийн 45-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**

11. Архангай аймгийн “Хүмүүн” цогцолбор I сургуулийн 10-р ангийн сурагч Д.Түвшинтөр. Бэлтгэсэн багш Т.Уртнасан (2010 ,2011он)
    - Улсын математикийн 46-р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**
    - Улсын математикийн 47-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**

12. Хөвсгөл аймгийн “Эрдмийн далай” цогцолбор сургуулийн 9-р ангийн сурагч Ж.Энхбаяр. Бэлтгэсэн багш Б.Түмэндэмбэрэл (2010 он)
    - Улсын математикийн 46-р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**
    - Улсын математикийн 48-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**
    - Оюутны математикийн 22-р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**
    - Оюутны математикийн 23-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**

- Оюутны математикийн 24-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**

13. Дархан-Уул аймгийн 19-р сургуулийн 9-р ангийн сурагч Г.Баяннамсрай. Бэлтгэсэн багш Т.Алтанцэцэг (2010 он)
    - Улсын математикийн 46-р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**

14. Дархан-Уул аймгийн “Оюуны ирээдүй” цогцолбор сургуулийн 8-р ангийн сурагч А.Мөнхзориг. Бэлтгэсэн багш Х.Төмөрхаан (2010 он)
    - Улсын математикийн 46-р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**

15. Өвөрхангай аймгийн “Мэргэд” сургуулийн 10-р ангийн сурагч А.Мөнхсуурь. Бэлтгэсэн багш С.Эрдэнэбилэг (2012 он)
    - Улсын математикийн 48-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**

16. Дархан-Уул аймгийн Монгол-Оюу сургуулийн 8-р ангийн сурагч Б.Энхбаяр, Бэлтгэсэн багш Т.Алтанцэцэг, О.Эрдэнэчимэг (2013 он)
    - Улсын математикийн 49-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**
    - Улсын математикийн 50-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**

17. Баянхонгор аймгийн Алгоритм төвийн 10-р сурагч М.Буянбилэг, Бэлтгэсэн багш С.Цагаан (2015 он)
    - Улсын математикийн 51-р олимпиадаас **Мөнгөн медаль**

18. Хөвсгөл аймгийн ДМЦ сургуулийн 9-р ангийн сурагч Х.Санжаахүү, Бэлтгэсэн багш П.Сүхбат (2015 он)
    - Улсын математикийн 51-р олимпиадаас **Хүрэл медаль**

БАГШ ТАНЬДАА

Д.Эрдэнэ-Очир

Алдраараа овоглосон сургуулийн хүүхэд цэцэгсийг ургуулж
Асаж дүрэлзэж явсан хүн гал унтарчээ
Алт нь түрүүлж живдэг хорвоогийн дүлий урсгалд
Алдраа хүртэж амжаагүй багш цэцэг хагдарчээ

Харьж амрахыг умартан танхимдаа хорогдон суугаад
Халуун яриа дэлгэн хөөрөлдөж явсан нь саяхан
Хясал хүслийн нар хүртэл хиртэх юм
Хагацал гунигаар нэрсэн нулимс гэдэг гашуун аа

Таны олон шавь нар төрийн тамга барилцан
Таван тивийн мэргэдтэй оюун далайд уралдаж
Талын монгол орныхоо одод болон гялалзаж
Тасарч алдрахгүй алдрыг тань оршихын хүрдийг эргүүлж байна

Айл гэрийн хийморьос өдрөөр харвасан од
Алгебрын их ухаанд үдэлж ниссэн од
Танхимд соёолсон цэцэгсийг усалж ширгэсэн гол
Танхил ухаанд бадарч ассан гал

Аниргүйн дунд нойрсох гүн мэлмийд тань мөргөе
Алд биеэ хайрлаагүй хүн сэтгэлд тань мөргөе
Бурууг үл тэвчих шударга занд тань мөргөе
Бусдын төлөө шатаасан хүслийн галд тань мөргөе

Эхлүүлж сурталчилж ухааруулсан эрх чөлөөнд тань мөргөе
Энгүй даруухан явсан эгэл ухаанд тань мөргөе
Мөн чанараараа мөнхөрсөн алдар хүнд тань мөргөе
Мөнхийн болж үлдсэн оюуны бүтээлд тань мөргөе

ИТГЭЛ УНДАРСАН 10-Н ЖИЛ

Ц.Цэрэнбалжид (Хүмүүн-1 сургууль МХУЗ-ын багш)

Хайр үнэртсэн өргөөндөө хос багана нь байсан
Хавартай намартай хорвоод түмнийхээ төлөө зүтгэсэн
Нар асгарсан танхимдаа тооны ухааныг хөгжүүлсэн
“Нас насны морьдоо” “торгон жолоо” өргүүлсэн

Нүд шиг алаг амьдралыг томъёо, теоремд багтаасан
Нутаг нутгийн тоочдод Архангайн тэнхээг таниулсан
Нямринчин багш минь ээ
Нөр их хөдөлмөрийн уурхай минь ээ

Бодож дуусгаагүй бодлого нь хариу нэхээд байхад
Ботгон нүдтэй ханийнх нь санчиг хяруугүй байхад
Буурал буурал уулсынх нь сүүдэр хүүшлээгүй байхад
Бүтээсэн үйлсийнх нь гавъяа Монголд данстай байхад

Үүрийн цолмон шиг үрсийнх нь харц ээрээд байхад
Үсэн буурал ижийнх нь цацлын сүү дундраагүй байхад
Үдшээр хайлсан өвгөдийнх нь хууч жаргаж амжаагүй байхад
Үзгэн сахиустай бүтээлийнх нь бэх нь хатаагүй байхад

Босоо цагаан хийморь нь яг л соёолон шиг байхад
Бусдын төлөө сэтгэл нь эгээ л хувилгаан мэт байхад
Нямринчин багш та нар луу үүрд буцчихсаан
Таныгаа буцахад

Шувууд нь буцсан шиг нутгийнх нь нуур эзгүйрсэн
Цэцэгс нь хагдарсан шиг номхон бор толгод нь эзгүйрсэн
Сэтгэлээ сэмрээн эгшиж төрөлх сургууль нь эзгүйрсэн
Сэм сэмхэн уйлсаар монгол тэр чигээрээ эзгүйрсэн

Ардчилалын түүхэн салхинд магнайдаа тоосгүй шувуун саарал
Алдаа онооны дэнсэнд хүн чанарын гайхамшиг
Авсан шагналаар тааруухан ч ард түмний гавъяат

Айдаа багш минь таны амьдрал бодь мөрийн зэрэг ээ

Босоо цагаан хийморийг нь сүсэглэе гэж кабинет нээлээ
Бахдам их авъяасыг нь шүншиглэе гэж олимпиад явууллаа
Хойч үедээ алдаршуулая гэж "Нямринчин сан" байгууллаа
Хотол бидэндээ эргэж мэндэлнэ гэж тооны ухааныг хөгжүүллээ

Арван засгийн наадамдаа ногт хоосон буцаагүй
Ажнай ажнай хүлгүүд нь уяан дээрээ дэргэдэг шиг
Ачит багш таны олон олон шавь нар
Алт мөнгөн маделиар, Арынхаа сайхан хангайг, мөн ч их гоёсон доо

Төр атгалцсан удирдагчаас төмөр хөлөг жолоодогчийг хүртэл
Түмэн түмэн шавь нар нь танийгаа л үгүйлж өмөлздөг дөө
Өнгө мөнгөнд гар таталгүй олимпиад зохион байгуулж
Өсвөр үеийнхний оюуны хөгжилд үнэтэй нэмэр оруулдаг аа

Дундуур зайгаа дүүргэх гэж зүүдэнд нь ирээд хургадаг аа
Дэндүү дэндүүхэн санаад үрсийнх нь нойр хулждаг даа
Гэнэ гэнэхэн үгүйлж ханийнх нь сэтгэл сэмэрдэг дээ
Гурван марал шиг үрсээ хараад магнайн нь үрчлээ тэнийдэг дээ

Даанчиг даанчиг эрт харвачихсан даа та минь
Дүрлэн дүрлэн навчинд гунигаа нэг шилгээх үү дээ
Дүүрэн дүүрэн аязаар сэтгэлээ аргадаад хөглөх үү дээ
Долоон булаг нутагт нь сүүгээ өргөөд залвбиръя даа

Номын ерөөл буян нь төрөлх сургуульд нь хураарай даа
Нар тоглосон тоонотдоо эргээд л нэг төрөөрэй дээ

А. Нямринчингийн нэрэмжит төвийн бүсийн математикийн XIV олимпиадын бодлогууд

В.Адъяасүрэн
Ц.Батболд

VII анги

А1. а) Цаг 2 цаг 22 минут болж байв. Цагийн ба минутын зүүний хоорондох өнцөг хэдэн градус вэ?

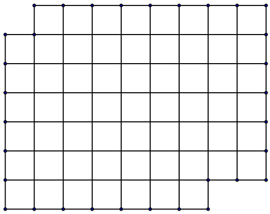
б) Цаг 7цаг 38 минут болж байв. Цагийн ба минутын зүүний хоорондох өнцөг хэдэн градус вэ?

А2. Шулуун дээр A, B, C, D дөрвөн цэг тэмдэглэв. AB=1см; BC=2см; CD=4см бол AD хэрчмийн уртыг ол.

А3. 1-ээс 7 хүртэлх цифрээр цифр давтахгүйгээр зохиогдсон бүх 7 оронтой тоог өсөх эрэмбээр цуварган бичив. 4352176 тоо хэддүгээр байранд бичигдэх вэ?

B1. Бат 1-ээс 9 хүртэлх цифрүүдийг нэг нэг удаа ашиглаад хэдэн анхны тоо бичээд нэмэхэд 225 гарав. Бат мөн цифрүүдийг ашиглаад нийлбэр нь 225-аас бага байх хэдэн анхны тоо бичиж чадах уу?

B2. Дүрсийг хоёр тэнцүү хэсэгт хуваа.



B3. 5-д хуваагддаг $2^n - 3$ хэлбэрийн тоо төгсгөлгүй олон байдаг гэж батал.

VIII анги

A1. A оройтой 28° хэмжээтэй өнцгийн нэг тал дээр $A_1,\ A_3$ цэгүүдийг, нөгөө тал дээр $A_2,\ A_4$ цэгүүдийг
$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ байхаар авав. $\angle AA_4A_3$-ийг ол.

A2. Аль нэг гурван тооных нь ХБЕХ-аас нөгөө гурван тооны ХБЕХ-ийг хассан ялгавар 2015 байх дараалсан зургаан натурал тоо олдох уу?

A3. Математикийн дугуйланд 14 сурагч сурдаг ба тэдэнд 14 бодлого бодуулахаар өгөхөд сурагчид ялгаатай тооны бодлого бодсон ба бодлого бүрийг тэнцүү тооны сурагчид боджээ. Энэ дугуйлангийн сурагч Үлмэдэх 1-ээс 7-р бодлогыг бодож, 8-13-р бодлогыг бодоогүй байв.. Сурагч Үлмэдэх 14-р бодлогыг бодсон уу?

B1. Дараалсан 1000 сондгой натурал тооны нийлбэр ямар нэг тооны 7 зэрэгт тоотой тэнцэж болох уу?

B2. Дурын 15 натурал тоон дотор нийлбэр нь 8-д хуваагддаг 8 тоо байдаг гэж батал.

B3. а) Зөв гурвалжныг адил хажуут трапецуудад хуваа.

б) Квадратыг адил хажуут трапецуудад хуваа.

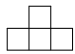
IX анги

A1. ABC гурвалжны AH_1 өндрийг агуулсан шулуун, BC талын дундаж цэг M_1, багтсан тойргийн төв I-ийг тэмдэглээд ABC гурвалжныг арилгав. Уг гурвалжныг сэргээн байгуул.

A2. x, y, z нь $x+y+z=1$ байх эерэг тоонууд бол $\frac{x^2+3xy}{x+y}+\frac{y^2+3yz}{y+z}+\frac{z^2+3zx}{z+x}\leq 2$ тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

A3. $(n^3+2n+3)\vdots 2240$ байх бүх натурал n тоог ол.

B1. ABC гурвалжинд AK өндөр, BN биссектрисс татав. $\angle KAB=\angle ACB$ ба $\angle BNC=90^\circ$ бол гурвалжны өнцгүүдийг ол.

B2. 8×8 хөлгийн нүднүүдийг $+1$ ба -1 тоогоор бөглөв.  хэлбэрийн дүрсийн бүх боломжит байрлалыг авч үзье. Энэхүү дүрсэд бичигдсэн дөрвөн тооны нийлбэр тэгээс ялгаатай байвал "оновчтой байрлалтай"гэе. "оновчгүй байрлалтай"дүрсийн тоо хамгийн цөөндөө хэд байх вэ?

B3. 23×23 квадратыг $1\times 1,\ 2\times 2,\ 3\times 3$ квадратуудад хуваав. 1×1 дүрс хамгийн цөөндөө хэд оролцсон байх вэ?

X анги

A1. Хавтгай дээр A ба B хоёр цэг өгөгдөв. $a\cdot l_a=b\cdot l_b$ байх ABC гурвалжны C оройн геометр байрыг ол. (l_a нь a талд буусан биссектриссийн урт г.м.)

A2. a, b, c нь $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$ байх сөрөг биш тоонууд бол

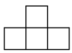
$$\sqrt{(a+b+1)(c+2)}+\sqrt{(b+c+1)(a+2)}+\sqrt{(c+a+1)(b+2)}\geq 9$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

А3. $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 5(n-1)$ ба $\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 2$ байх натурал $a_0, a_1, \ldots, a_n$ тоонууд оршин байдаг натурал n-ийн бүх утгыг ол.

В1. $A_1A_2\ldots A_{4n}$ $(n \geq 2)$ зөв $4n$-өнцөгтийн талбай S-тэй тэнцүү бол $A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}$ дөрвөн өнцөгтийн талбайг ол.

В2. 14×14 хөлгийн нүднүүдийг $+1$ ба -1 тоогоор бөглөв.



хэлбэрийн дүрсийн бүх боломжит байрлалыг авч үзье. Энэхүү дүрсэд бичигдсэн дөрвөн тооны нийлбэр тэгээс ялгаатай байвал "оновчтой байрлалтай"гэе. "оновчгүй байрлалтай"дүрсийн тоо хамгийн цөөндөө хэд байх вэ?

В3. Аливаа бодит x, y-ийн хувьд $f(x-y) - xf(y) \leq 1 - x$ нөхцлийг хангах бүх $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функцийг ол.

XI анги

А1. Хавтгай дээр A ба B хоёр цэг өгөгдөв. $a \cdot m_a = b \cdot m_b$ байх ABC гурвалжны C оройн геометр байрыг ол.(m_a нь a талд буусан медианы урт г.м.)

А2. Аливаа эерэг a, b, c тоонуудын хувьд:

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a+b+c)^3$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

А3. $7p + 1 \vdots q$ ба $7q + 1 \vdots p$ байх анхны тоон бүх (p, q) хосыг ол.

В1. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн хувьд $AB = BC$ ба $AD = DC$ байв. K, L, M нь харгалзан AB, CD, AC хэрчмүүдийн дундаж байг. A цэгээс CD-д татсан перпендикуляр шулуун, C цэгээс AD-д татсан перпендикуляр шулуунтай H цэгт огтолцоно. $KL \perp HM$ гэж батал.

B2. $0 \leq a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \leq 7$ ба $2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3} + 2^{a_4} + 2^{a_5} \vdots 5$ байх сөрөг биш бүхэл эрэмбэлэгдсэн $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 5-тын тоог ол.

B3. a, b, c $(a > b > c)$ нь $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ тэгшитгэлийн язгуурууд бол $ac^2 + ba^2 + cb^2$ илэрхийллийн утгыг ол.

XII анги

A1. ABC гурвалжны BC, CA, AB талууд дээр харгалзан A_1, B_1, C_1 цэгүүдийг $AA_1,\ BB_1,\ CC_1$ шулуунууд нэг цэгт огтлолцож байхаар авав. $A_2,\ B_2,\ C_2$ нь харгалзан $B_1C_1,\ C_1A_1,\ A_1B_1$-ийн дундаж цэгүүд бол $AA_2,\ BB_2,\ CC_2$ шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

A2. a, b, c нь $abc = 1$ байх эерэг тоонууд байг. Аливаа натурал n-ийн хувьд

$$\frac{a^{n+2}}{a^n + (n-1)b^n} + \frac{b^{n+2}}{b^n + (n-1)c^n} + \frac{c^{n+2}}{c^n + (n-1)a^n} \geq \frac{3}{n}$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

A3. $\{1, 2, \ldots, 5n\}$ олонлогийн элементүүдийнх нь нийлбэр 5-д хуваахад 4 үлдэгдэл өгдөг бүх дэд олонлогуудын тоог ол.

B1. Аливаа натурал k $(k \geq 2)$ тооны хувьд төгсгөлийн k ширхэг цифрийн хагасаас цөөнгүй нь 9-ийн цифр байдаг 2-ын зэрэг олдоно гэж батал.

B2. $f(x)$ ба $g(x)$ нь $\forall n \in \{1, 2, 3, \ldots, 4030\}$:
$f(n) + (-1)^n g(n) = 2^n$ нөхцлийг хангах 2014 зэргийн олон гишүүнтүүд байг. $g(x)$ олон гишүүнтийн ахмад гишүүний өмнөх коэффи-

циентийг ол.

B3. Аливаа ABC гурвалжны хувьд

$$\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^3\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^3\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^3\frac{\gamma}{2}}\leq\frac{3R}{2(r+p)}$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

Бодолтууд

VII.A1. Хариу: а) $51°$, б) $1°$.

а) ба б) хэсгийн бодолт адил учраас б) хэсгийг бодъё. 7 цаг болж байх үед цагийн ба минутын зүүний хоорондох өнцөг $360° \cdot \frac{7}{12} = 210°$ байна. Минутын зүү 1 минутад $6°$-аар эргэнэ. Иймд 38 минутад минутын зүү $38 \cdot 6° = 228°$-аар эргэнэ. Харин цагийн зүү 38 минутад $228° \cdot \frac{1}{12} = 19°$-аар эргэнэ. Иймээс 7 цаг 38 минут болж байхад цагийн ба минутын зүүний хоорондох өнцөг $(210° + 19°) - 228° = 1°$ байна.▲

VII.A2. Бүх боломжит байршлыг авч үзье.

1) $A - B - C - D$.
$AD = AB + BC + CD = 1 + 2 + 4 = 7$(см)

2) $D - A - B - C$.
$AD = CD - (AB + BC) = 4 - (1 + 2) = 1$(см)

3) $C - A - B - D$.
$AD = AB + BD = AB + (CD - BC) = 1 + (4 - 2) = 3$(см)

4) $D - C - A - B$.
$AD = AC + CD = (BC - AB) + CD = (2 - 1) + 4 = 5$(см)

VII.A3. $\overline{1******}$, $\overline{2******}$, $\overline{3******}$ хэлбэрийн тоонууд тус бүрдээ $6! = 720$ ширхэг байна.

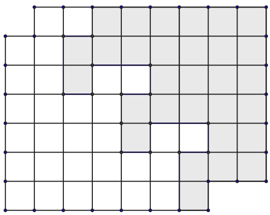
$\overline{41*****}$, $\overline{42*****}$ хэлбэрийн тоонууд тус бүрдээ $5! = 120$ ширхэг байна. $\overline{431****}$, $\overline{432***}$ хэлбэрийн тоонууд тус бүрдээ $4! = 24$ ширхэг байна. $\overline{4351***}$ хэлбэрийн тоо $3! = 6$ ширхэг байна. Иймээс 4352167, 4352176 тоонууд харгалзан $3 \cdot 720 + 2 \cdot$

$120 + 2 \cdot 24 + 6 + 1 = 2455 - p$, 2456-р байранд байна.▲

VII.B1. Хариу: Чадна.

$$207 = 2 + 3 + 5 + 41 + 67 + 89$$
$$207 = 2 + 3 + 5 + 47 + 61 + 89$$
$$207 = 2 + 5 + 7 + 43 + 61 + 89.\blacktriangle$$

VII.B2. Дүрсийг зурагт үзүүлсэн шиг хоёр тэнцүү хэсэгт хуваана.



VII.B3. Натурал тоог 5-д хуваахад гарах үлдэгдлүүд үелдэг гэдгийг ашиглаад $n = 4k + 3,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ хэлбэрийн тоонуудын хувьд $2^n - 3$ тоо 5-д хуваагдана гэдгийг гаргана.▲

VIII.A1. Хариу: $84°$. AA_1A_2 гурвалжин адил хажуут учраас $\angle A_1AA_2 = \angle AA_2A_1 = 28°$. Гурвалжны гадаад өнцөг хамар биш дотоод өнцгүүдийнхээ нийлбэртэй тэнцүү байдаг учраас
$\angle A_3A_1A_2 = 28° + 28° = 56°$.

$A_1A_2A_3$ гурвалжин адил хажуут тул
$\angle A_1A_3A_2 = \angle A_3A_1A_2 = 56°$. $\angle A_3A_2A_4$ нь AA_2A_3 гурвалжны гадаад өнцөг учраас

$$\angle A_3A_2A_4 = \angle A_3AA_2 + \angle AA_3A_2 = 28° + 56° = 84°.$$

$A_2A_3A_4$ гурвалжны адил хажуут учраас

$$\angle AA_4A_2 = \angle A_3A_2A_4 = 84°.\blacktriangle$$

VIII.A2. Хариу: Олдохгүй. Эсрэгээс нь бодлогын нөхцөл хангах дэс дараалсан 6 натурал тоо олддог гэж үзье. Энэ 6 тоон дотор 3 тэгш тоо бий.

Аль нэг гурвынх нь ХБЕХ-аас нөгөө гурвын ХБЕХ-ийг хасахад сондгой тоо гарч байхын тулд 3 тэгш тоо хасагдагч буюу хасагч дотор л орно. Дэс дараалсан 3тэгш тоон дотор 3-т хуваагдах тоо 1 бий, дэс дараалсан 3 сондгой тоон дотор 3-т хуваагдах тоо 1 бий. Иймд бидний авч үзэж буй ялгавар 3-т хуваагдана. Гэтэл 2015 тоо 3-т хуваагдахгүй. Иймээс бодлогын нөхцөл хангах дэс дараалсан 6 натурал тоо олдохгүй.▲

VIII.A3. Дугуйланд 15 сурагч сурдаг ба тэд ялгаатай тооны бодлого бодсон гэж үзье. Тэгвэл нийт бодсон бодлогын тоо (давхардуулан тооцоход)

$$0 + 1 + \ldots + 13 + 14 = 105$$

байна. Хий тоолсон сурагчийн бодсон бодлогын тоог
x $(0 \leq x \leq 14)$ гэвэл математикийн дугуйлангийн 14 сурагчийн бодсон бодлогын тоо $105 - x$ байна. Бодлого бүрийг тэнцүү тооны сурагч бодсон тул $105 - x$ тоо 14-т хуваагдах ёстой. Энэ нь $x = 8$ үед л биелнэ. Иймээс дугуйлангийн 14 сурагч дотор 8 бодлого бодсон сурагч байхгүй. Эндээс дүгнэлт хийвэл Үлмэдэх 14-р бодлогыг бодоогүй гэж гарна.▲

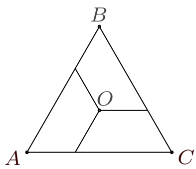
VIII.B1. Хариу: болно. Дараалсан 1000 сондгой натурал тоог $n-999,\ n-997, \ldots, n-1, n+1, \ldots,\ n+997,\ n+999$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл

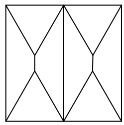
$$(n-999) + (n-997) + \ldots + (n-1) + (n+1) + \ldots \\ + (n+997) + (n+999) = 100n$$

$n = 10^4$ гэж авбал энэ нийлбэр 10^7-тэй тэнцэнэ.▲

VIII.B2. Дурын гурван натурал тоон дотор тэгш, сондгойгоороо адил тоо ядаж хоёр байна гэдэг санааг хэд хэдэн удаа ашиглах замаар бодлогыг шийднэ. Бодолтыг гүйцээгээрэй.

VIII.B3. а) Зөв гурвалжныг зураг1-д үзүүлсэн шиг гурван адил хажуут трапецад хуваана. O нь ABC зөв гурвалжны төв болно.





б. Эхлээд квадратыг зураг 2-т үзүүлсэн шиг дөрвөн адил хажуут трапец, дөрвөн зөв гурвалжинд хуваана. Зөв гурвалжин бүрийг зураг1-д үзүүлсэн шиг адил хажуут трапецуудад хуваана.▲

IX.A1. ABC гурвалжныг сэргээн зурсан гэж үзье. Багтсан тойргийн BC талтай шүргэлцэх цэгийг K_1 , K_1I-ийн багтсан тойрогтой огтлолцох цэгийг D гэе. Багтсан тойргийн D цэгт татсан шүргэгч ба AH_1-ийн огтлолцлын цэгийг Q гэвэл $AQID$ дөрвөн өнцөгт нь параллелограмм болно(батлаарай). Иймд $AQ = ID = r$ ба Q нь $M_1I,\ AH_1$ шулууны огтлолцлын цэг болно. Ийнхүү ABC гурвалжныг байгуулах арга олдов. Байгуулалтыг бие даан гүйцэтгээрэй.

IX.A2. Кошийн тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл:

$$\frac{x^2+3xy}{x+y} = \frac{(x^2+xy)+2xy}{x+y} = x + \frac{2}{x+y}\cdot xy$$
$$\le x + \frac{2}{x+y}\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = x + \frac{x+y}{2} = \frac{3x}{2} + \frac{y}{2}$$

Үүнтэй адилаар,

$$\frac{y^2+3yz}{y+z} \le \frac{3y}{2}+\frac{z}{2}$$
$$\frac{z^2+3zx}{z+x} \le \frac{3z}{2}+\frac{x}{2}$$

гэж батлагдана. Эдгээр гурван тэнцэтгэл бишийг гишүүнчлэн нэмэхэд бидний батлах тэнцэтгэл биш гарна.
Тэнцэтгэл биш $x=y=z=\frac{1}{3}$ үед л тэнцэтгэл болно.▲

IX.A3. Хариу: $n=2240q+447,\ n=2240q+2239,\ q\in\mathbb{Z}_+$.

IX.B1. Хариу: $30^\circ,\ 30^\circ,\ 120^\circ$.

IX.B2. Хариу: 36. Таван нүднээс тогтсон хэрээс бүр ядаж нэг оновчгүй байрлалтай дүрс агуулна гэж баталъя. Эсрэгээс нь

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & b & \\ \hline a & e & c \\ \hline & d & \\ \hline \end{array}$$

хэрээс оновчгүй байрлалтай дүрс агуулдаггүй гэж үзье.
$S=a+b+c+d+e$ байг. Тэгвэл $S-a=S-b=S-c=S-d=0$ эндээс $a=b=c=d$ гэж гарна. Иймд
$S-a=e+3a=0 \Rightarrow e=-3a=\pm3$. Энэ нь боломжгүй тул хэрээс бүрт ядаж нэг оновчгүй байрлалтай дүрс агуулна. 8×8 хөлгийн захын биш нүд бүр хэрээсийн төв болох тул хөлөгт 36 хэрээс байна. Иймээс оновчгүй байрлалтай дүрсийн тоо 36-аас цөөнгүй. Оновчгүй байрлалтай дүрс 36 байх жишээг зурагт үзүүлэв.

1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

IX.B3. Хариу: 1. Хөлгийн 1-р, 4-р, 7-р, 10-р, 13-р, 16-р, 19-р, 22-р мөрүүдийг будъя. $2\times 2,\ 3\times 3$ квадрат бүр тэгш тооны будагдаагүй нүд агуулах ба будагдаагүй нүдний тоо сондгой тул 1×1 квадрат ядаж нэг оролцоно. 1×1 квадрат нэг ширхэг оролцсон хуваалтын жишээ гаргая. 23×23 квадратыг 11×12 хэмжээтэй 2 ширхэг, 12×11 хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд хуваавал дунд нь 1×1 квадрат үлдэнэ. Эдгээр тэгш өнцөгт бүрийг $2\times 2,\ 3\times 3$ квадратуудад хуваая. Энэ нь бидний олох ёстой хуваалт болно.▲

X.A1. ABC гурвалжинд $AA_1,\ BB_1$ өндрүүд, $AA_2,\ BB_2$ биссектрисүүд татъя. Өгөгдсөн нөхцөл ёсоор,

$$a\cdot AA_2 = b\cdot BB_2 \Leftrightarrow \frac{AA_2}{BB_2} = \frac{b}{a} \qquad (1)$$

$$\text{Нөгөө талаас, } \frac{AA_1}{b} = \cos\gamma = \frac{BB_1}{a} \ \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{AA_1}{BB_1} \qquad (2)$$

(1) ба (2)-оос $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AA_2}{BB_2}$ гэж гарна. Иймээс AA_1A_2 ба BB_1B_2 тэгш өнцөгт гурвалжнууд төсөөтэй. Дараах хоёр тохиолдол байх боломжтой.

1) $A_2,\ B_2$ цэгүүд $CA_1,\ CB_1$ шулуунуудаар үүсгэгдсэн хагас хавтгайнуудын огтлолцолд харъяалагдана. Энэ тохиолдолд $\angle AA_2B = \angle BB_2A$ байх тул ABC гурвалжны $A,\ B$ орой дахь өнцгүүд тэнцүү. ө.х. C цэг AB хэрчмийн дундажид татсан түүнд перпендикуляр шулуун дээр оршино.

2) A_2 цэг CA_1 хэрчим дээр орших ба B_2 цэг CB_1 хэрчмийн гадна оршино. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг O гэе. CB_2OA_2 нь багтсан дөрвөн өнцөгт байна.
$\angle A_2OB_2 = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BCA$ гэдгийг ашиглавал:

$\angle BCA + 90^\circ + \frac{1}{2}\cdot\angle BCA = 180^\circ$. Эндээс $\angle BCA = 60^\circ$ гэж гарна. Ийнхүү C цэг AB хэрчмээс 60° өнцгөөр харагдах нум дээр оршино.▲

X.A2. Бодлогын нөхцөлөөс,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3 &\Leftrightarrow 3-\sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\\
&\Leftrightarrow 9-6\sqrt{c}+c=a+b+2\sqrt{ab}\\
&\Rightarrow 9-6\sqrt{c}+c\le a+b+(a+b)\\
&\Leftrightarrow \frac{9}{2}-3\sqrt{c}+\frac{c}{2}\le a+b\\
&\Leftrightarrow \frac{11}{2}-3\sqrt{c}+\frac{c}{2}\le a+b+1
\end{aligned}
$$

гэж гарна. Иймд

$$
\begin{aligned}
(a+b+1)(c+2) &\ge \left(\frac{11}{2}-3\sqrt{c}+\frac{c}{2}\right)(c+2)\\
&=9+(\sqrt{c}-1)^2(\sqrt{c}-2)^2\ge 9\\
&\Rightarrow \sqrt{(a+b+1)(c+2)}\ge 3
\end{aligned}
$$

Үүнтэй адилаар

$$
\sqrt{(b+c+1)(a+2)}\ge 3,\quad \sqrt{(a+c+1)(b+2)}\ge 3
$$

гэж батлагдана. Эдгээр тэнцэтгэл бишийг гишүүнчлэн нэмэхэд бидний батлах тэнцэтгэл биш гарна. Тэнцэтгэл биш $a=b=c=1$ үед л тэнцэтгэл болно. ▲

X.A3. Кошийн тэнцэтгэл биш хоёр удаа хэрэглэвэл:

$$
\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\le\frac{a_0+a_1+\ldots+a_n}{n+1}=\frac{5(n-1)}{n+1}.
$$

Эндээс

$$
\begin{aligned}
(n+1)^2\le 10(n-1) &\Leftrightarrow n^2-8n+11\le 0\\
&\Rightarrow n=4+\sqrt{5}\Rightarrow n\le 6
\end{aligned}
$$

$n = 2, 3, 4, 5, 6$ утгууд бодлогын нөхцөлийг хангана. Үнэхээр

$$
\begin{aligned}
&n = 2 \text{ үед } a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 2\\
&n = 3 \text{ үед } a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 3,\ a_3 = 3\\
&n = 4 \text{ үед } a_0 = 2,\ a_1 = 2,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 6\\
&n = 5 \text{ үед } a_0 = 2,\ a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 4,\ a_4 = 4,\ a_5 = 4\\
&n = 6 \text{ үед } a_0 = 3,\ a_1 = 3,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad a_4 = 4,\ a_5 = 4,\ a_6 = 4.\blacktriangle
\end{aligned}
$$

X.B1. Өгөгдсөн зөв 4n-өнцөгтийг багтаасан тойргийн төвийг O гэж тэмдэглэе. Тэгвэл

$$S = S_{OA_1A_2} + S_{OA_2A_3} + \ldots + S_{OA_{4n}A_1} = 4n \cdot S_{OA_1A_2}$$

O цэг A_1A_{2n+1} диагональ дээр орших ба

$$A_1A_{2n+1} \| A_2A_{2n} \| A_3A_{2n-2} \| \ldots \| A_{1+(n-1)}A_{2n+1-(n-1)} = A_nA_{n+2}.$$

Иймээс

$$
\begin{aligned}
S_{A_1A_nA_{n+2}} &= S_{OA_nA_{n+2}},\\
S_{A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}} &= S_{A_1A_nA_{n+2}} + S_{A_nA_{n+1}A_{n+2}}\\
&= S_{OA_nA_{n+2}} + S_{A_nA_{n+1}A_{n+2}}\\
&= S_{OA_nA_{n+1}A_{n+2}} = S_{OA_nA_{n+1}} + S_{OA_{n+1}A_{n+2}}\\
&= 2S_{OA_nA_{n+1}} = 2\frac{S}{4n} = \frac{S}{2n}.\blacktriangle
\end{aligned}
$$

X.B2. Хариу:144. IX.B2 бодлогын бодолттой адилаар бодогдоно.

X.B3. $f(x-y) \leq 1 - x + xf(y)$ (1) гэе.

1) (1)-д $x = 0$ гэж авбал:

$$
\begin{aligned}
&f(-y) \leq 1\\
&\quad \text{ө.х.} \forall y \in \mathbb{R} : f(y) \leq 1 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

2) (1)-д $x = 2y$ гэж авбал:

$$\begin{aligned} f(y) &\le 1 - 2y + 2yf(y) \\ &\Leftrightarrow 2y - 1 \le (2y-1)f(y) \end{aligned}$$

Эндээс $y > \frac{1}{2}$ үед $f(y) \ge 1$ (3) гэж гарна.

3) (2) ба (3)-аас, $y > \frac{1}{2}$ үед $f(y) = 1$

4) (1)-д $x = 1, y = 0$ гэж авбал:

$$f(1) \le 1 - 1 + f(0) = f(0)$$

$f(1) = 1$ тул $f(0) \ge 1$ (4)
(2) ба (4)-өөс, $f(0) = 1$
5) (1)-д $y = x$ гэж авбал:

$$\begin{aligned} f(0) &\le -x + xf(x) \\ &\Leftrightarrow xf(x) \ge x \end{aligned}$$

Иймхүү $x > 0$ үед $f(x) \ge 1$ (5)
(2) ба (5)-аас $x \ge 0 : f(x) = 1$

6) $x > 0, y > 0$ байг. Тэгвэл $x - y > 0$ ба $f(x-y) = 1$, $f(x-y) \le 1 - x + xf(x)$. Иймд $x \le xf(y) \Rightarrow 1 \le f(y)$. Иймхүү $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 1.$▲

XI.A1. ABC гурвалжинд $AA_1,\ BB_1$ өндрүүд, $AA_2,\ BB_2$ медианууд татъя. Өгөгдсөн нөхцөл ёсоор,

$$a \cdot AA_2 = b \cdot BB_2 \Leftrightarrow \frac{AA_2}{BB_2} = \frac{b}{a}. \tag{1}$$

Нөгөө талаас,

$$\frac{AA_1}{b} = \cos\gamma = \frac{BB_1}{a} \Leftrightarrow \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{b}{a} \tag{2}$$

(1) ба (2)-оос, $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AA_2}{BB_2}$ гэж гарна. Иймээс AA_1A_2 ба BB_1B_2 тэгш өнцөгт гурвалжнууд төсөөтэй. Дараах хоёр тохиолдол байх боломжтой.

1) A_2, B_2 цэгүүд CA_1, CB_1 шулуунуудаар үүсгэгдсэн хагас хавтгайнуудын огтлолцолд харъяалагдана. Энэ тохиолдолд $\angle AA_2B = \angle BB_2A$. Иймд ABA_2B_2 дөрвөн өнцөгт нь багтсан дөрвөн өнцөгт ба $AB \| A_2B_2$. Иймээс ABA_2B_2 нь адил хажуут трапец болно. Иймд ABC нь адил хажуут гурвалжин. Иймхүү C цэг AB хэрчмийн дундажид татсан түүнд перпендикуляр шулуун дээр оршино.

2) A_2, B_2 цэгүүд CA_1, CB_1-ийн хувьд ялгаатай байршилтай байг. M-ээр ABC гурвалжны хүндийн төвийг тэмдэглэе. Тэгвэл CA_2MB_2 нь багтсан дөрвөн өнцөгт байна. K-аар A_2B_2 хэрчмийн дунджийг тэмдэглэе.

$$MK = \frac{1}{6}CC_2,\ CK = \frac{1}{3}CC_2,\ B_2K = KA_2 = \frac{1}{4}AB,$$

$MK \cdot KC = B_2K \cdot KA_2$ гэдгийг ашиглавал:

$$\frac{1}{6} \cdot CC_2 \cdot \frac{1}{3} \cdot CC_2 = \frac{1}{16}AB^2.$$

Эндээс $CC_2 = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot AB$ гэж гарна. Иймхүү C цэг AB-ийн дундаж дээр төвтэй $R = \frac{3}{2\sqrt{2}}AB$ радиустай тойрог дээр оршино. Энэ тойргийн AB-тэй огтлолцох 2 цэгээс бусад бүх цэг бидний олох геометр байрын цэг болно.▲

XI.A2. Кошийн тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл:

$$\begin{aligned} a^5 + 1 &= \frac{a^5 + a^5 + a^5 + 1 + 1}{5} + \frac{a^5 + a^5 + 1 + 1 + 1}{5} \\ &\geq \sqrt[5]{(a^5)^3 \cdot 1^2} + \sqrt[5]{(a^5)^2 \cdot 1^3} = a^3 + a^2 \\ &\Leftrightarrow a^5 - a^3 + 3 \geq a^2 + 2 \end{aligned}$$

Иймээс бид $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq (a + b + c)^3$ гэж баталчихвал бодлого шийдэгдэнэ.

Кошийн тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл:

$$3 = \frac{a^3+2}{a^3+2} + \frac{b^3+2}{b^3+2} + \frac{c^3+2}{c^3+2} = \left(\frac{a^3}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{a^3+2} + \frac{b^3}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2}\right) + \left(\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{c^3}{c^3+2}\right)$$
$$\geq \frac{3a}{\sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}} + \frac{3b}{\sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}}$$
$$+ \frac{3c}{\sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}}$$
$$= \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}}.$$

Эндээс

$$3 \cdot \sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)} \geq 3(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow (a^3+2)(b^3+2)(c^3+2) \geq (a+b+c)^3$$

гэж гарна. Тэнцэтгэл биш $a = b = c = 1$ үед л тэнцэтгэл болно.▲

XI.A3. Хариу: $p = 2, q = 3;\ p = 2, q = 5;\ p = 3, q = 11.$▲

XI.B1. Тэмдэглэгээг хялбарчлах зорилгоор $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{d}$ гэж тэмдэглэе.

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{DL}$$

гэдгээс $2 \cdot \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ гэж гарна. M нь AC хэрчмийн дундаж цэг тул $2\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}$.

Иймд $KL \perp HM \Leftrightarrow (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}) = 0.$

Бодлогын нөхцөл ёсоор $AB = BC,\ AD = DC$ учраас BD нь AC-ийн дундажид татсан перпендикуляр шулуунтай давхцана. ө.х. M цэг BD шулуун дээр орших ба $BD \perp AC$.

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{d} - \overrightarrow{c}$$

учраас $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})(\overrightarrow{d}-\overrightarrow{c})=0$.

Бодлогын нөхцөл ёсоор $HA\perp BC$, $HC\perp AD$ тул $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$, $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}=0$. Иймд

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}) &= \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}\\ &= -\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}\\ &= (\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})(\overrightarrow{d}-\overrightarrow{c})=0.\end{aligned}$$

Иймээс $KL\perp HM$.▲

XI.B2. Хариу: 6528. $0\le a_1,a_2,\ldots,a_n\le 7$ ба $2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_n}\vdots 5$ байх $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ n-тын тоог $f(n)$ гэж тэмдэглэе. Бодлогын нөхцөлийг хангахгүй n-т бүрээс бодлогын нөхцөл хангах 2 ширхэг (n+1)-тийг үүсгэж чадна. Иймд

$f(n+1)=2\cdot(8^n-f(n))$ рекуррент томъёо биелнэ. Энэхүү рекуррент томъёог ашиглавал:

$$f(1)=0,\ f(2)=2(8-0)=16,\ f(3)=2(64-16)=96,$$
$$f(4)=2(512-96)=832,\ f(5)=2(4096-832)=6528.▲$$

XI.B3. $x=ac^2+ba^2+cb^2$, $y=ab^2+bc^2+ca^2$ гэе. $a>b>c$ гэдгийг ашиглавал: $x-y=(a-c)(c-b)(b-a)>0$.
Иймд $x>y$.

$$\text{Виетийн теоремоор,}\quad \begin{aligned} u&=a+b+c=2\\ v&=ab+bc+ca=-1\\ w&=abc=-1.\end{aligned}$$

Иймд

$$\begin{aligned}x+y&=a(ab+ac)+b(bc+ba)+c(cb+ca)\\ &=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc=uv-3w=1.\end{aligned}$$

$$x_1^3+y_1^3+z_1^3-3x_1y_1z_1=(x_1+y_1+z_1)(x_1^2+y_1^2+z_1^2 - x_1y_1-y_1z_1-z_1x_1)$$

адилтгалыг ашиглавал

$$\begin{aligned} xy &= (a^3+b^3+c^3-3abc)abc \\ &+ (a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3-3a^2b^2c^2)+9a^2b^2c^2 \\ &= u(u^2-3v)w+v(v^2-3uw)+9w^2=-12 \end{aligned}$$

болно. Иймхүү Виетийн урвуу теоремоор x, y нь

$$t^2-t-12=0 \;\Leftrightarrow\; (t+3)(t-4)=0$$

тэгшитгэлийн язгуур болно. $x>y$ гэдгийг тооцвал $x=4$.
ө.х. $\quad ac^2+ba^2+cb^2=4.$▲

XII.A1. A_2 цэгээс AB, AC шулуун хүртэлх зайг харгалзан d_1, d_2 гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $\frac{\sin\angle BAA_2}{\sin\angle CAA_2}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{AC_1}{AB_1}$. Бусад өнцгүүдийн хувьд адил тэнцэтгэлүүд бичээд, тэдгээрийг үржүүлж, дараа нь Чевийн урвуу теорем ашиглана.▲

XII.A2. Кошийн тэнцэтгэл биш хэд хэдэн удаа хэрэглэвэл:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc}\frac{a^{n+2}}{a^n+(n-1)b^n} &= \sum_{cyc}\frac{a^2(a^n+(n-1)b^n)-(n-1)a^2b^n}{a^n+(n-1)b^n} \\ &= \sum_{cyc}a^2-(n-1)\sum_{cyc}\frac{a^2b^n}{a^n+(n-1)b^n} \\ &\geq \sum_{cyc}a^2-(n-1)\sum_{cyc}\frac{a^2b^n}{n\cdot\sqrt[n]{a^n\cdot(b^n)^{n-1}}} \\ &= \sum_{cyc}a^2-(n-1)\sum_{cyc}ab \\ &= \frac{1}{n}\Bigg(a^2+b^2+c^2+\frac{1}{2}(n-1)((a-b)^2 \\ &\qquad\qquad + (b-c)^2+(c-a)^2) \\ &\geq \frac{1}{n}(a^2+b^2+c^2)\geq\frac{1}{n}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{(abc)^2}=\frac{3}{n}. \end{aligned}$$

Энэ тэнцэтгэл биш $a = b = c = 1$ үед л тэнцэтгэл болно.▲

XII.A3. Элементүүдийнх нь нийлбэр 5-т хуваагддаг дэд олонлогуудын тоог a_n

Элементүүдийнх нь нийлбэр 5-т хуваахад 4 үлдэгдэл өгдөг дэд олонлогуудын тоог b_n.

Элементүүдийнх нь нийлбэр 5-т хуваахад 3 үлдэгдэл өгдөг дэд олонлогуудын тоог c_n.

Элементүүдийнх нь нийлбэр 5-т хуваахад 2 үлдэгдэл өгдөг дэд олонлогуудын тоог d_n.

Элементүүдийнх нь нийлбэр 5-т хуваахад 1 үлдэгдэл өгдөг дэд олонлогуудын тоог e_n.
гэж тус тус тэмдэглэе. Тэгвэл $a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 2^{5n}$.

	Дэд олонлогууд					
$a_1 = 8$	$\emptyset$	5	$\{14\}, \{23\}$	$\{145\}, \{235\}$	1234	12345
$b_1 = 6$		4	$\{13\}, \{45\}$	$\{234\}, \{135\}$	2345	
$c_1 = 6$		3	$\{12\}, \{35\}$	$\{134\}, \{125\}$	1345	
$d_1 = 6$		2	$\{34\}, \{25\}$	$\{124\}, \{345\}$	1245	
$e_1 = 6$		1	$\{24\}, \{15\}$	$\{123\}, \{245\}$	1235	

•$\{1, 2, 3, ..., 5n\}$ олонлогийн элементүүдийнх нийлбэр 5-т хуваагддаг дэд олонлог бүрт $\{5n + 1, 5n + 2, 5n + 3, 5n + 4, 5n + 5\}$ олонлогийн элементүүдийнх нь нийлбэр 5-т хуваагддаг олонлог бүрийг нэгтгэхэд $\{1, 2, 3, \ldots, 5n + 5\}$ олонлогийн элементүүдийнх нийлбэр 5-т хуваагддаг дэд олонлогууд үүснэ.

•$\{1, 2, 3, ..., 5n\}$ олонлогийн элементүүдийнх нийлбэр 5-т хуваахад 4 үлдэгдэл өгдөг дэд олонлог бүрт $\{5n + 1, ..., 5n + 5\}$ олонлогийн элементүүдийнх нь нийлбэр 5-т хуваахад 1 үлдэгдэл өгдөг олонлог бүрийг нэгтгэхэд $\{1, 2, 3, ..., 5n + 5\}$ олонлогийн элементүүдийнх нь нийлбэр 5-т хуваагддаг дэд олонлогууд үүснэ ... гэх мэт. Иймд

$$a_{n+1} = 8a_n + 6(b_n + c_n + d_n + e_n)$$

рекуррент томъёо гарах ба $a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 2^{5n}$ гэдгийг ашиглавал: $a_{n+1} = 2a_n + 6 \cdot 2^{5n}$. Иймхүү,

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 6 \cdot 2^{5(n-1)} = 2a_{n-1} + 6 \cdot 32^{n-1} \\ a_{n-1} &= 2a_{n-2} + 6 \cdot 2^{5(n-2)} = 2a_{n-2} + 6 \cdot 32^{n-2} \\ &\dots \qquad \dots \qquad \dots \\ a_3 &= 2a_2 + 6 \cdot 5^{5\cdot 2} = 2a_2 + 6 \cdot 32^2 \\ a_2 &= 2a_1 + 6 \cdot 5^{5\cdot 1} = 2a_1 + 6 \cdot 32^1 \end{aligned}$$

болох ба эдгээр тэнцэтгэлүүдийг харгалзан
$1, 2, 3, ..., 2^{n-3}, 2^{n-2}$-ээр үржүүлээд нэмбэл:

$$a_n = 2^{n-1} \cdot a_1 + 6(32^{n-1} + 2 \cdot 32^{n-2} + ... + 2^{n-3} \cdot 32^2 + 2^{n-2} \cdot 32^1)$$

Иймд

$$\begin{aligned} a_n &= 2^{n-1} \cdot 8 + 6(32^{n-1} + 2 \cdot 32^{n-2} + ... + 2^{n-2} \cdot 32^1) \\ &= 2^{n-1} \cdot 2 + 6(32^{n-1} + 2 \cdot 32^{n-2} + ... + 2^{n-2} \cdot 32^1 + 2^{n-1}) \\ &= 2^n + \frac{6}{30}(32 - 2)(32^{n-1} + 32^{n-2} \cdot 2 + ... + 32 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}) \\ &= 2^n + \frac{1}{5}(32^n - 2^n) = \frac{1}{5}(4 \cdot 2^n + 32^n). \end{aligned}$$

$$\text{ө.х.} \qquad a_n = \frac{1}{5}(2^{n+2} + 32^n).$$

$b_n = c_n = d_n = e_n$ гэдгийг үнэмшихэд төвөггүй. Иймд $a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 2^{5n} = 32^n$ гэдгээс $b_n = \frac{1}{4}(32^n - a_n)$ гэж гарах ба $a_n = \frac{1}{5}(4 \cdot 2^n + 32^n)$ гэдгийг ашиглавал $b_n = \frac{1}{5}(32^n - 2^n)$.▲

XII.B1. Эйлерийн теоремоор,
$2^{4\cdot 5^{k-1}} - 1 = 2^{\varphi(5^k)} - 1 \vdots 5^k$. $2^{4\cdot 5^{k-1}} - 1 = (2^{2\cdot 5^{k-1}} - 1)(2^{2\cdot 5^{k-1}} + 1)$ ба $2^{2\cdot 5^{k-1}} - 1 \equiv -2 \equiv 3 \pmod 5$ тул $2^{2\cdot 5^{k-1}} + 1 \vdots 5^k$. Иймээс

$2^k \cdot (2^{2\cdot 5^{k-1}} + 1) = 2^{2\cdot 5^{k-1}+k} + 2^k$ тоо 10^k-д хуваагдана.

ө.х. $2^{2\cdot 5^{k-1}+k} + 2^k$ тоо дор хаяад k ширхэг тэгээр төгсөнө. $k \geq 2$ үед 2^k тооны аравтын бичлэгдэх цифрийн тоо $\frac{k}{2}$-аас цөөн. Иймээс $2^{2\cdot 5^{k-1}+k}$ тооны төгсгөлийн k ширхэг цифрийн хагасаас цөөнгүй нь 9-ийн цифр байна.▲

XII.B2. Хариу: $\frac{3^{2014}}{2^{2014}\cdot 2014!}$.
$f(2x)+g(2x)=h_1(x),\ f(2x-1)-g(2x-1)=h_2(x)$ гэе. Тэгвэл $\forall x\in\{1,2,\dots,2015\}:\ h_1(x)=2^{2x},\ h_2(x)=2^{2x-1}$. Лагранжийн интерполяцлагч томъёог ашиглавал

$$h_1(x)=\sum_{i=1}^{2015}2^{2i}\cdot\prod_{j=1,\ i\neq j}^{2015}\frac{x-j}{i-j}.$$

$h_1(x)$ олон гишүүнтийн x^{2014}-ийн өмнөх коэффициент нь

$$\sum_{i=1}^{2015}2^{2i}\prod_{j=1,i\neq j}^{2015}\frac{1}{i-j}=\frac{1}{2014!}\cdot\sum_{i=1}^{2015}2^{2i}(-1)^{2015-i}\cdot C_{2014}^{i-1}$$
$$=\frac{4\cdot 3^{2014}}{2014!}$$

Үүнтэй адилаар $h_2(x)$-ийн x^{2014}-ийн өмнөх коэффициентийг олбол $\frac{2\cdot 3^{2014}}{2014!}$.
$g(x)=\frac{1}{2}\left(h_1\left(\frac{x}{2}\right)-h_2\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$ тул $g(x)$ олон гишүүнтийн x^{2014}-ийн өмнөх коэффициент

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4\cdot 3^{2014}}{2^{2014}\cdot 2014!}-\frac{2\cdot 3^{2014}}{2^{2014}\cdot 2014!}\right)=\frac{3^{2014}}{2^{2014}\cdot 2014!}.▲$$

XII.B3. Алдаатай бодлого тавигдсан учраас нийт оролцогчдоос уучлал өчье. $a=3,\ b=4,\ c=5$ талтай гурвалжны хувьд тэнцэтгэл биш худал гэдгийг шууд шалгачихна.

Тэгш сондгой функц

В. Адъяасүрэн
Д. Энхмэнд

X олонлог дээр тодорхойлогдсон $y = f(x)$ функц өгөгдсөн байг.

Тодорхойлолт 1. а) X олонлог координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй,

б) $\forall x \in X-$ийн хувьд $f(x) = f(-x)$ тэнцэтгэл биелж байвал $y = f(x)$ функцийг **тэгш функц** гэнэ.

Тодорхойлолт 2. а) X олонлог координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй,

б) $\forall x \in X$-ийн хувьд $f(-x) = -f(x)$ тэнцэтгэл биелж байвал $y = f(x)$ функцийг **сондгой функц** гэнэ.

Зарим элементар функцүүдийн тэгш сондгой эсэхийг харуулсан хүснэгт

	Функц	Тэгш, сондгой эсэх
1	$f(x) = x^{2n}, n \in \mathbb{N}$	Тэгш
2	$f(x) = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$	Сондгой
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	Сондгой
4	$f(x) = \sqrt[2n+1]{x}, n \in \mathbb{N}$	Сондгой
5	$f(x) = \sqrt[2n]{x}, n \in \mathbb{N}$	Тэгш ч биш сондгой ч биш
6	$f(x) = \log_a x$	Тэгш ч биш сондгой ч биш
7	$f(x) = a^x$	Тэгш ч биш сондгой ч биш
8	$f(x) = \sin x$	Сондгой
9	$f(x) = \cos x$	Тэгш
10	$f(x) = \operatorname{tg} x$	Сондгой
11	$f(x) = \operatorname{ctg} x$	Сондгой
12	$f(x) = \arcsin x$	Сондгой
13	$f(x) = \arccos x$	Тэгш ч биш сондгой ч биш
14	$f(x) = \operatorname{arctg} x$	Сондгой
15	$f(x) = \operatorname{arcctg} x$	Тэгш ч биш сондгой ч биш

Жишээ 1. $f(x) = x^7 + 5x^3 + 3x$ функцийг сондгой гэж батал.
$\triangle$ **а)** Функцийн тодорхойлогдох муж: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
б) $\forall x \in D(f)$−ийн хувьд

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^7 + 5(-x)^3 + 3(-x) \\ &= -(x^7 + 5x^3 + 3x) = -f(x). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Жишээ 2. $f(x) = x^4 - \sin(\frac{\pi}{2} + x^3 - x)$ функцийг тэгш гэж батал.
$\triangle$**а)** Функцийн тодорхойлогдох муж: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
б) $\forall x \in D(f)$−ийн хувьд

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 - \sin(\frac{\pi}{2} + (-x)^3 - (-x)) \\ &= x^4 - \cos(-x^3 + x) \\ &= x^4 - \cos(x^3 - x) \\ &= x^4 - \sin(\frac{\pi}{2} + x^3 - x) = f(x). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Жишээ 3. $f(x) = \sin^3 2x \cos 4x + \sin 5x$ функцийг сондгой гэж батал.
$\triangle$**а)** Функцийн тодорхойлогдох муж: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
б) $\forall x \in D(f)$−ийн хувьд

$$\begin{aligned} f(-x) &= (\sin(-2x))^3 \cos(-4x) + \sin(-5x) \\ &= (-\sin 2x)^3 \cos 4x - \sin 5x \\ &= -((\sin 2x)^3 \cdot \cos 4x + \sin 5x) = f(x). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Жишээ 4. $f(x) = x^2 + 3x + 4$ функцийн тэгш сондгой эсэхийг тогтоо.
$\triangle$**а)** Функцийн тодорхойлогдох муж: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
б) $\forall x \in D(f)$−ийн хувьд

$$f(x) + f(-x) = (x^2 + 3x + 4) + ((-x)^2 + (-3x) + 4) = 2x^2 + 4 \neq 0$$

$\forall x \in D(f)-$ийн хувьд

$$f(x)-f(-x) = (x^2+3x+4)-((-x)^2+(-3x)+4) \\ = 6x \neq 0 \qquad\qquad (x \neq 0 \text{ үед})$$

тул f(x) функц тэгш ч биш, сондгой ч биш. ▲

Жишээ 5. $f(x)=\log_2(x+\sqrt{1+x^2})$ функцийн тэгш сондгой эсэхийг тогтоо.

△**а)** $\forall x \in \mathbb{R} : x+\sqrt{1+x^2} > x+\sqrt{x^2} = x+|x| \geq 0$ учраас функцийн тодорхойлогдох муж: $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

б) $\forall x \in D(f)$-ийн хувьд:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_2(-x+\sqrt{1+(-x)^2}) \\ &= \log_2 \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2+x}} \\ &= \log_2 \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \\ &= -\log_2(x+\sqrt{1+x^2}) = -f(x) \end{aligned}$$

Иймээс өгөгдсөн функц сондгой. ▲

Жишээ 6. $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$ функцийг сондгой гэж батал.

△**а)** Өгөгдсөн функцийн тодорхойлогдох муж:
$D(f)=(-\infty;+\infty)$.

б) $\forall x \in (-\infty;+\infty)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\sqrt{1+(-x)^2}-x-1}{\sqrt{1+(-x)^2}-x+1} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}-(x+1)}{(\sqrt{1+x^2}+1)-x} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+1+x}{\sqrt{1+x^2}+1+x} \end{aligned}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - (x+1)^2}{(\sqrt{1+x^2}+1)^2 - x^2} = \frac{-2x}{2+2\sqrt{1+x^2}}$$
$$= -\frac{x}{(\sqrt{1+x^2}+1)} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x-1}$$
$$= -\frac{x(\sqrt{1+x^2}+x-1)}{x^2+x\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1} = -f(x). \quad \blacktriangle$$

Жишээ 7. $a > 0,\ a \neq 1,\ n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}$ байг. $f(x) = \log_a(x^n + \sqrt{x^{2n}+a^t}) - \frac{t}{2}$ функцийн тэгш сондгой эсэхийг тогтоо.

$\triangle$**а)** $\forall x \in \mathbb{R} : x^n + \sqrt{x^{2n}+a^t} > x^n + \sqrt{x^{2n}} = x^n + |x^n| \geq 0$ учраас функцийн тодорхойлогдох муж: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

б) 1) $n = 2k+1$ байг. $\forall x \in D(f)$-ийн хувьд:

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \log_a(x^n + \sqrt{x^{2n}+a^t}) - \frac{t}{2} \\ &\qquad + \log_a(-x^n + \sqrt{x^{2n}+a^t}) - \frac{t}{2} \\ &= \log_a(-x^{2n} + x^{2n} + a^t) - t = \log_a a^t - t = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = -f(-x) \end{aligned}$$

тул $f(x)$ функц сондгой.

2) $n = 2k$ байг. $\forall x \in D(f)$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(-x) &= \log_a(x^n + \sqrt{x^{2n}+a^t}) - \frac{t}{2} \\ &\qquad - \log_a(-x^n + \sqrt{x^{2n}+a^t}) + \frac{t}{2} \\ &= \log_a(x^n + \sqrt{x^{2n}+a^t}) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = -f(-x) \end{aligned}$$

тул $f(x)$ функц сондгой. $\blacktriangle$

Жишээ 8. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4, & x \leq -3 \\ x, & -2 < x < 2 \\ -x^2 - 3x - 4, & x \geq 3 \end{cases}$

функцийн тэгш сондгой эсэхийг тогтоо.

$\triangle$**а)** Функцийн тодорхойлогдох муж:

$$D(f) = (-\infty; -3] \cup (-2; 2) \cup [3; +\infty)$$

б) $D(f)$ нь координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй.
$\forall x \in (-\infty; 3]$−ийн хувьд $-x \in [3; +\infty)$ ба

$$\begin{aligned} f(-x) &= -(-x)^2 - 3(-x) - 4 = -x^2 + 3x - 4 \\ &= -(x^2 - 3x + 4) = -f(x) \end{aligned}$$

$\forall x \in (-2; 2)$:

$$f(-x) = -x = -f(x)$$

$\forall x \in [3; +\infty)$-ийн хувьд $-x \in (-\infty; -3]$ ба

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 - 3(-x) + 4 = x^2 + 3x + 4 \\ &= f(-x) = -(-x^2 - 3x - 4) = -f(x) \end{aligned}$$

тул $f(x)$ функц сондгой. ▲

Жишээ 9. $f(x) = \lg \frac{x+1}{x-1} \cdot \left(x - \lg \frac{2+x}{2-x}\right)$ функцийн тэгш сондгой эсэхийг тогтоо.

$\triangle$**а)** Функцийн тодорхойлогдох мужийг олъё.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ \frac{2+x}{2-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-1) > 0 \\ (2+x)(2-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array} \right. \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{array} \right.$$

Ийнхүү $D(f) = (-2; -1) \cup (1; 2)$. Энэ олонлог координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй.

б) $\forall x \in D(f)-$ийн хувьд:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \lg\frac{-x+1}{-x-1}\cdot\left(-x-\lg\frac{2-x}{2+x}\right) \\ &= \lg\frac{x+1}{x-1}\cdot\left(x-\frac{2+x}{2-x}\right) = f(x) \end{aligned}$$

учраас $f(x)$ функц тэгш. ▲

Жишээ 10. $f(x) = 2^x$ функцийн тэгш сондгой хоёр функцийн нийлбэрт тавь.

$$\triangle f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2} + \frac{2^x - 2^{-x}}{2} = \varphi(x) + \psi(x)$$

а) φ, ψ функцүүдийн тодорхойлогдох муж $(-\infty; +\infty)$

б) $\forall x \in (-\infty; +\infty)$:

$$\varphi(-x) = \frac{2^{-x} + 2^x}{2} = \frac{2^x + 2^{-x}}{2} = \varphi(x)$$

тул $\varphi(x)$ функц тэгш.

$\forall x \in (-\infty; +\infty)$:

$$\psi(-x) = \frac{2^{-x} - 2^x}{2} = -\frac{2^x - 2^{-x}}{2} = -\psi(x)$$

тул $\psi(x)$ функц сондгой. ▲

Жишээ 11. $f(x) = 5^x + \frac{25}{5^x}$ байг. параметрийн ямар утганд $y = f(x+a)$ функц тэгш байх вэ?

$\triangle$**а)** $y = f(x+a)$функцийн тодорхойлогдох муж: $(-\infty; +\infty)$

б) Энэ функц тэгш байхын тулд $\forall x \in (-\infty; +\infty)$-ийн хувьд

$$f(x+a) = f(-x+a)$$

тэнцэтгэл биелэх ёстой.

$$\begin{aligned} f(x+a) = f(-x+a) &\Leftrightarrow 5^{x+a} + \frac{25}{5^{x+a}} \\ &= 5^{-x+a} + \frac{25}{5^{-x+a}} \Leftrightarrow 5^x \cdot 5^a + 5^{2-x-a} \\ &= 5^{-x} \cdot 5^a + 5^{2+x-a} \Leftrightarrow (5^x - 5^{-x})(5^a - 5^{2-a}) = 0 \end{aligned}$$

Сүүлчийн тэнцэтгэл дурын бодит -ийн хувьд биелэхийн тулд $5^a - 5^{2-a} = 0$ байх ёстой.

$$\begin{aligned} 5^a - 5^{2-a} = 0 &\Leftrightarrow 5^a = 5^{2-a} \\ &\Leftrightarrow a = 2 - a \\ &\Leftrightarrow a = 1. \ \blacktriangle \end{aligned}$$

Жишээ 12. $f(x) = 3ax^3 - 2\sin\frac{8\pi a - x}{5}$ функц сондгой байх ба параметрийн хамгийн бага эерэг утгыг ол.

$\triangle$**а)** Өгөгдсөн функцийн тодорхойлогдох муж: $(-\infty; +\infty)$

б) Бид $\forall x \in (-\infty; +\infty) : f(-x) = -f(x)$ байх a параметрийн утгыг олох ёстой.

$$\begin{aligned} f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow -3ax^3 - 2\sin\frac{8\pi a + x}{5} &= \\ = -3ax^3 + 2\sin\frac{8\pi a - x}{5} \sin\frac{8\pi a}{5}\cos\frac{x}{5} &= 0 \end{aligned}$$

Сүүлчийн тэнцэтгэл дурын бодит -ийн хувьд биелэхийн тулд

$$\sin\frac{8\pi a}{5} = 0$$

байх ёстой.

$$\begin{aligned} \sin\frac{8\pi a}{5} = 0 \Leftrightarrow \frac{8\pi a}{5} &= \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{5n}{8}, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Эндээс бодлогын нөхцөл хангах параметрийн хамгийн бага эерэг утга $\frac{5}{8}$ гэж гарна. $\blacktriangle$

Жишээ 13. $f(x) = x^4 + 2ax^3 - 2x^2 - 6ax$ функцийн график тэгш хэмийн босоо тэнхлэгтэй байх параметрийн утгуудыг ол.

$\triangle$Хэрэв $y = f(x)$ функцийн график $x = b$ тэгш хэмийн босоо тэнхлэгтэй байвал $y = f(x+b)$ функцийн график ординат тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй байна. Өөрөөр хэлбэл $y = f(x+b)$ функц

тэгш функц байна.
Иймээс $\forall x \in (-\infty; +\infty)$:

$$\begin{aligned} f(x+b) &= f(-x+b) \\ &\Leftrightarrow\ (x+b)^4 + 2a(x+b)^3 - 2(x+b)^2 - 6a(x+b) \\ &= (-x+b)^4 + 2a(-x+b)^3 - 2(-x+b)^2 - 6a(-x+b) \end{aligned}$$

Эндээс $\begin{cases} 4b + 2a = 0 \\ 4b^3 + 6ab^2 - 4b - a = 0 \end{cases}$ гэж гарна.
Энэ системээс $\left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = 0 \\ a = 2 \end{array}\right.$ гэж олно. ▲

Функцийн тэгш эсэхийг ашиглахад хялбархан шийдэгдэх нэгэн жишээ авч үзье.

Жишээ 14.

$$\sqrt{x(x+7)} + \sqrt{(x+7)(x+17)} + \sqrt{(x+17)(x+24)} = 12 + 17\sqrt{2} \qquad (1)$$

тэгшитгэлийг бод.

△ $t = x + 12$ орлуулга хийвэл (1) тэгшитгэл

$$\sqrt{(t-12)(t-5)} + \sqrt{(t-5)(t+5)} + \sqrt{(t+5)(t+12)} = 12 + 17\sqrt{2} \qquad (2)$$

тэгшитгэлд шилжинэ.

$$f(t) = \sqrt{(t-12)(t-5)} + \sqrt{(t-5)(t+5)} + \sqrt{(t+5)(t+12)}$$

функц авч үзье. Энэ функцийн тодорхойлогдох муж

$$D(f) = (-\infty; -12) \cup (12; +\infty)$$

Энэ нь O цэгийн хувьд тэгш хэмтэй ба $f(-t) = f(t)$. Өөрөөр хэлбэл $f(t)$ функц тэгш функц болно. (2) тэгшитгэлийг $t \geq 12$

үед эхлээд бодъё. $f(t)$ функц $[12;+\infty)$ интервал дээр эрс өсөх тул (2) тэгшитгэл авч үзэж буй интервал дээр нэгээс илүүгүй язгууртай. $t = 13$ тоо язгуур болохыг шалгаж болно. Иймээс (2) тэгшитгэл

$$t = 13,\ t = -13$$

хоёр язгууртай. Иймд (1) тэгшитгэл

$$x = 1,\ x = -25$$

хоёр язгууртай. ▲

Жишээ 15. $f(x) = 4x + \log_2 \frac{x^2+5x}{x^2+3x-4}$ функцийн график төвийн тэгш хэмтэй гэж батлаад, энэхүү төвийн тэгш хэмийн координатуудыг ол.

△ Функцийн тодорхойлогдох мужийг олбол:

$$\frac{x^2+5x}{x^2+3x-4} > 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+5)}{(x+4)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -5 \\ -4 < x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$$

Энэ олонлог $x = -2$ цэгийн хувьд тэгш хэмтэй. Иймээс функцийн график $(-2; f(-2)) = (-2; -8)$ цэгийн хувьд тэгш хэмтэй байх боломжтой.

$x = t - 2,\ f(x) = S(t) - 8$ гэвэл

ZURAG

$S(t)$ функцийг сондгой гэж баталъя.

а) $t \in (-\infty; -3) \cup (-2; 2) \cup (3; +\infty)$ олонлог тэг цэгийн хувьд тэгш хэмтэй.

б) $\forall t \in (-\infty; -3) \cup (-2; 2) \cup (3; +\infty)$:

$$\begin{aligned} S(t) &= 8 + 4(t-2) + \log_2 \frac{(t-2)^2 + 5(t-2)}{(t-2)^2 + 3(t-2) - 4} \\ &= 4t + \log_2 \frac{t^2+t-6}{t^2-t-6} \end{aligned}$$

ба

$$S(-t) = -4t + \log_2 \frac{t^2-t-6}{t^2+t-6} = -\left(4t + \log_2 \frac{t^2+t-6}{t^2-t-6}\right)$$

тул $S(-t) = -S(t)$. Өөрөөр хэлбэл $S(t)$ функц сондгой. Иймээс $f(x)$ функцийн график $(-2;-8)$ цэгийн хувьд тэгш хэмтэй. ▲

Дасгал, бодлого

Дараах функцүүдийн тэгш сондгой эсэхийг тогтоо(**1-5**)

1. $f(x) = \frac{1-3^x}{1+3^x}$

2. $f(x) = \frac{e^{x\lg a}-1}{e^{x\lg a}+1},\ (a>0)$

3. $f(x) = \lg|x+\sqrt{x^2-1}|$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+(-1)^n x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1},\ (n\in\mathbb{N})$

5. $f(x) = (\sqrt{5}-2)^x + (-1)^n\cdot(\sqrt{5}+2)^x$

6. $f(x) = 3^x - \frac{27}{3^x}$ байг. a параметрийн ямар утганд $y = f(x+a)$ функц сондгой байх вэ?

7. $f(x) = ax^3 - 6x^2 + (a-2)x$ функцийн график абсцисс тэнхлэг дээр орших тэгш хэмийн төвтэй байх a параметрийн утгуудыг ол.

8. $f(x) = 2x + \log_3\frac{x^2+2x}{x^2+10x+24}$ функцийн график төвийн тэгш хэмтэй гэж батлаад, энэхүү төвийн тэгш хэмийн координатуудыг ол.

Архангай аймгийн математикийн зуны сургалт-3

Дэд проф Б.Сандагдорж
Дэд проф А.Алтангэрэл

Архангай аймгийн засаг дарга Д.Бат-Эрдэнийн дэвшүүлсэн “Математик” хөтөлбөр болон Монголын математикийн 52-р олимпиадыг 2016 онд Архангай аймагт зохион явуулах ажлын хүрээнд 2015 оны 6-р сарын 19-ээс 27-ны өдрүүдэд Архангай аймгийн Спортын сургууль энэхүү зуны сургалт зохион байгуулагдав. Бид сургалтыг дунд ангийн багш, бага ангийн багш, 7-9 анги төгсөгчид, 10-11 анги төгсөгчид хэмээн ангилаад өдөр бүр 8 цагийн сургалтыг явуулсан болно. Сургалтад дунд ангийн 20 гаруй багш, бага ангийн 20 гаруй багш, 7, 8, 9 –р анги төгссөн болон 10, 11-р анги төгссөн 40-өөд сурагч нийт 80 багш сурагч хамрагдсан. Мөн Мэдээлэл зүйн багш нарын сургалтыг анх удаагаа зохион явуулсан болно.

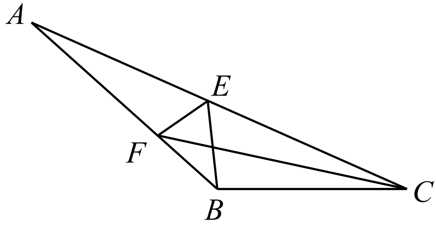
Сургалтын явцад ангилал бүрээр Сорил-I, II, III олимпиад явуулсан бөгөөд холбогдох бодлого байр эзэлсэн багш сурагчдын нэрсийг оруулллаа.

7-9 р анги, Дунд ангийн багш Сорил-I (2015.06.21 Архангай, Спортын сургууль)

Бодлого-1. Хоёр оронтой x тоо нь хоёр оронтой y тооноос 2 дахин их байв. $x-$ийн цифрүүдийн нийлбэр нь $y-$ийн нэг цифртэй тэнцүү бөгөөд $x-$ийн цифрүүдийн ялгавар нь $y-$ийн нэг цифртэй тэнцүү. $y-$ийн хамгийн их утгыг ол.

Бодлого-2. $1234567899\cdot1234567894\cdot1234567892$ үржвэрээс $1234567891\cdot 1234567896\cdot1234567898$ үржвэрийг хасахад хэд гарах вэ?

Бодлого-3. $\angle CAB=18^0$ ба $\angle BCA=24^0$ өнцгүүдтэй ABC гурвалжны СА тал дээр Е цэгийг $\angle CEB=60^0$ байхаар, АВ тал дээр F цэгийг $\angle AEF=60^0$ байхаар тус тус сонгон авчээ. $\angle BFC$ өнцгийг ол.



Бодлого-4. Бодит x, y, z тоонуудын хувьд $x - 7y + 8z = 4$ ба $8x + 4y - z = 7$ байв. $x^2 - y^2 + z^2$ илэрхийллийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

Бодлого-5. $\angle CAB = \angle BCA = 45^0$ өнцгүүдтэй *ABC* гурвалжны *BC* талын дундаж цэг *L* байв. Гурвалжны *CA* тал дээр *P* цэгийг *BP*, *AL* хэрчмүүд хоорондоо перпендикуляр байхаар сонгон авчээ. $CP = \sqrt{2}$ см бол *AB* талын урт хэдэн см бэ?

Бодлого-6. Дэс дараалсан натурал x, y, zтоонуудын хувьд $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y}$ нийлбэр бүхэл тоо байв. $x + y + z$ нийлбэрийг ол.

Бодлого-7. Бодит x, y тоонуудын хувьд $x^3 + y^3 = 1957$ бөгөөд $(x + y)(x + 1)(y + 1) = 2014$ байв. $x + y$ нийлбэрийг ол.

Бодлого-8. $\angle BAD = 60^0$ өнцөгтэй $ABCD$ параллелограммын *BC* талын дундаж цэг *E*, *CD* талын дундаж цэг *F* байв. *BD* диагонал нь *AE* хэрчимтэй *M* цэгт, *AF* хэрчимтэй N цэгт огтлолцоно. *AB*=15см, *AD*=8 см бол *MN* хэрчмийн уртыг ол.

Бодлого-9. A, B, C, D, E, F, G, H гэсэн 8 сурагч дугуй ширээ тойрон суухаар болжээ. A, B сурагчид зэрэгцэж суусан, харин A, C сурагчид зэрэгцэж суугаагүй байхаар тэд ширээнд хэдэн ялгаатай янзаар сууж болох вэ? Цагийн зүүний дагуу эргүүлэлтээр нэгээс нь нөгөөг гаргаж болох 2 байрлалыг ижилхэн гэж тооцно.

Бодлого-10. $(\frac{21}{n} - 2)^2 - 2\left(\frac{21}{n} - 2\right) = n + 42$ нөхцлийг хангах хамгийн их бүхэл n тоог ол.

Бодлого-11. Зөвхөн 0 ба 2 цифрээр бичигдсэн 1-ээс их, 10 000 000 000-аас бага ялгаатай бүх натурал тоог жагсааж бичихэд нийт хэдэн ширхэг 0 цифр бичигдэх вэ?

Бодлого-12. Тойрог дээр цагийн зүүний дагуу *A, B, C, D* гэж байрласан дөрвөн цэг өгөгджээ. $AD = BD = 50\sqrt{3}$ см, $AC = 106{,}8$ см, $\angle CAD = 30^0$ бол *BC* хэрчмийн уртыг ол.

Бодлого-13. Самбарт 1, 2, 3, ... , 2014 тоонуудын урвуу тоонуудыг бичсэн байв (нэг, хоёрны нэг, гуравны нэг гэх мэтчилэн). Нэг удаагийн үйлдлээр самбараас аль нэг 2 тоог арчаад, энэ хоёр тооны үржвэр дээр нийлбэрийг нь нэмэхэд гарах тоог самбарт нэмж бичиж болно. Энэ үйлдлийг самбарт ганц тоо үлдтэл үргэлжлүүлэн хийв. Самбарт үлдсэн тоо хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ?

Бодлого-14. $\angle ABC = \angle ACB = 30^0$ өнцгүүдтэй ABC гурвалжин ба O цэг өгөгдөв. $\angle CAB = \angle CAO + \angle OAB$ бөгөөд OA=OC=1 см, OB=2 см бол BC талын уртыг ол.

Бодлого-15. Таежон цамхаг тоглоом нь эгнүүлэн байрлуулсан 3 шонтой. Эхний шонд радиус нь дээрээсээ доошоо өсдөг 7 ширхэг дугуйг цамхаг байдалтай давхарлаж байрлуулсан байна. Тоглоомын зорилго нь энэ цамхагийг 3-р шонд шилжүүлэн байрлуулах юм. Нэг удаагийн үйлдлээр, аль нэг шонгийн хамгийн дээр байрласан дугуйг түүний зэрэгцээ шонгийн хамгийн дээр шилжүүлэн байрлуулж болно (1-р шонгоос 3-р шон руу шууд шилжүүлж болохгүй). Ингэхдээ дугуйг түүнээс бага радиустай дугуйн дээр байрлуулж болохгүй. Тоглоомыг хамгийн цөөндөө хэдэн үйлдлээр дуусгаж болох вэ?

10-11 р анги Сорил-I (2015.06.21 Архангай, Спортын сургууль)

1. $p + q = (p - q)^3$ байх бүх p, q анхны тоог ол.

2. $a_1 = 1, a_2 = 2, n \geq 1$ үед $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n + 3$ гэж тодорхойлогдох дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог бич.

3. Аливаа бодит x, y, z −ийн хувьд $f(x + y) + f(y + z) + f(z + x) \geq 3f(x + 2y + 3z)$ биелдэг бүх $f: R \to R$ функцийг ол.

4. n ширхэг хавтгай огторгуйг хамгийн олондоо хэдэн хэсэгт хуваах вэ?

Бага ангийн багш, Сорил-I (2015.06.21 Архангай, Спортын сургууль)

1. Бат 5 цифр орсон бүх ялгаатай гурван оронтой тоонуудын нийлбэрийг, харин Цэцэг 7 цифр орсон бүх ялгаатай гурван оронтой тоонуудын нийлбэрийг олжээ. Цэцэгийн олсон нийлбэр Батын олсон нийлбэрээс хэдээр их вэ?

2. Сурагч нэгэн натурал тоог сонгон аваад 3, 4, 8-д хуваагаад гарах үлдэгдлүүдийг хооронд нь нэмэхэд 12 гарав. Сурагчийн сонгон авсан тоог 24-д хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

3. дүрсийг 3 хэсэгт хувааж эвлүүлэн квадрат үүсгэ.

4. Мишээлд 11 ширхэг улаан,12 ширхэг хөх, 17 ширхэг ногоон, 20 ширхэг шар өнгийн бөмбөг байв. Мишээл сагснаас 3 ширхэг өөр өнгийн бөмбгөөр үлдсэн 4

дэх өнгийн гурван ширхэг бөмбөгийг сольж авч болно. Олон удаа ингэж солиход Мишээл хамгийн олондоо хэдэн улаан бөмбөгтэй болж чадах вэ?

5. 1-ээс 96 хүртэлх тоог аль ч хоёр хөрш тооны нийлбэр анхны тоо байхаар нэг эгнээнд цувуулан бич.

7-9 р анги, Дунд ангийн багш Сорил-II (2015.06.23 Архангай, Спортын сургууль)

Бодлого-1. $S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$, $S_2=\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{2\cdot6}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{5\cdot6}$, $S_3=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot5}+\frac{1}{2\cdot3\cdot6}+\frac{1}{2\cdot4\cdot5}+\frac{1}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1}{2\cdot5\cdot6}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot6}+\frac{1}{3\cdot5\cdot6}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}$, $S_4=\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot6}+\frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot6}+\frac{1}{2\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}$, $S_5=\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$ бөгөөд харилцан анхны натурал m,n тоонуудын хувьд $S_1-S_2+S_3-S_4+S_5=\frac{m}{n}$ бол $m+n$ нийлбэрийг ол.

Бодлого-2. Ялгаатай анхны p,q,r,s тоонуудын хувьд $p+q+r+s$ нийлбэр нь мөн анхны тоо байв. p^2+qr ба p^2+qs тоонууд нь бүтэн квадрат бол $p+q+r+s$ нийлбэрийг ол.

Бодлого-3. $9n^2+23n-2$ тоо нь ямар нэгэн дараалсан хоёр тэгш натурал тооны үржвэртэй тэнцүү байх бүх бүхэл n тооны нийлбэрийг ол.

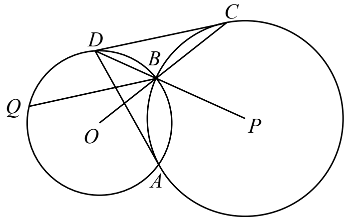
Бодлого-4. Хуваалтын бүх хэсгүүдийг эвлүүлж, ялгаатай 2 өөр хэмжээтэй адил хажуут тэгш өнцөгт гурвалжин хийж болдог байхаар өгөгдсөн адил хажуут тэгш өнцөгт гурвалжныг хамгийн цөөндөө хэдэн олон өнцөгт хэлбэртэй хэсэгт хувааж болох вэ?

Бодлого-5. Натурал a,b,c тоонуудын хувьд $2b+1$ нь a–д, $2c+1$ нь b–д, $2a+1$ нь c–д хуваагддаг байв. $a+b+c$ нийлбэрийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

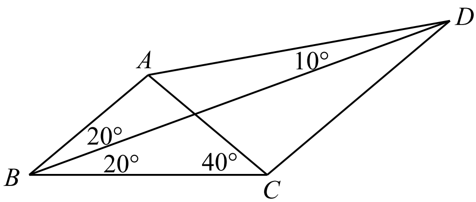
Бодлого-6. Дөрвөн хуваагчийн аль нэг хоёрынх нь нийлбэрээс үлдсэн хоёр хуваагчийн нийлбэрийг хасахад бүхэл тооны квадрат гардаг, яг 4 ширхэг натурал тоон хуваагчтай, 100-аас бага бүх натурал тоог ол.

Бодлого-7. Солонгос ресторан өдөр бүр өөрийн цэсэнд загасны, үхрийн махан, тахианы махан шөлний аль нэгийг нь сонгодог байв. Тахианы махан шөлийг дараалсан 3 өдөр сонгодоггүй бол ресторaны долоо хоногийн шөлний цэсийг хэдэн янзаар зохиож болох вэ?

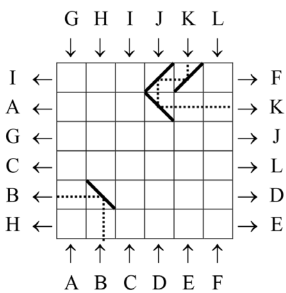
Бодлого-8. *O* ба *P* цэгт төвтэй хоёр тойрог хоорондоо *A* ба *B* цэгээр огтлолцоно. *OB* хэрчмийн үргэлжлэл нь 2-р тойргийг *C* цэгт, *PB* хэрчмийн үргэлжлэл нь эхний тойргийг *D* цэгт тус тус огтолно. B цэгийг дайрсан *CD*-тэй параллель шулуун эхний тойргийг $Q \neq B$ цэгт огтлов. *AD=BQ* болохыг батал.

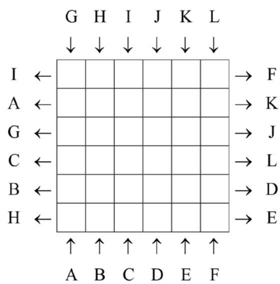


Бодлого-9. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтөд $\angle BDA = 10^0, \angle ABD = \angle DBC = 20^0$ ба $\angle BCA = 40^0$ байв. $\angle BDC$ өнцгийг ол.



Бодлого-10. 6x6 хүснэгтэд A-аас L хүртэл нэрлэгдсэн арван хоёр бөмбөгний хүснэгт рүү орж гарах чиглэлийг сумаар зааж үзүүлжээ. Хүснэгтийн зарим нүдний нэг диагонал дээр хаалт байрлуулсан байв. Бөмбөг түүний замд хаалт тааралдвал, уг хаалтанд ойж явж байсан чиглэлтэй перпендикуляр чиглэл рүү явж эхэлнэ. Зурагт байрлуулсан 4 хаалтанд B болон K бөмбөгнүүд ойж хүснэгтээс хэрхэн орж гарахыг үзүүлэв. Энэ 4 хаалтыг арчиж, мөн эдгээр хаалт байрласан 4 нүднээс ялгаатай өөр 10 нүдэнд нэг нэг хаалт байрлуулж бүх бөмбөгийг хүснэгтээс оруулж гаргах замыг олж зур.





10-11 р анги, Сорил-II (2015.06.23 Архангай, Спортын сургууль)

1. $3^n + 55$ нь бүтэн квадрат байх бүх натурал n тоог ол.

2. Аливаа $x, y \in R$ хувьд $f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)cosx$ нөхцлийг хангах $f: R \to R$ функцийг ол.

3. ABC гурвалжны AC тал дээр D ба E цэгүүдийг $AB = AD$ ба $BE = EC$ байхаар ($E \in [AD]$) авав. ABC гурвалжны багтаасан тойргийн BC нумын дундаж цэг F бол B, E, D, F нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

4. $a_1 = a_2 = 2,\ a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1}^2$ бол ерөнхий гишүүний томъёог ол.

Бага ангийн багш, Сорил-II (2015.06.23 Архангай, Спортын сургууль)

1. Сандалнууд нь 1, 2, 3, 4 гэж дугаарлагдсан арван эгнээ сандал дээр нийт 27 хүн суусан байв. Эгнээ бүр дэх хүмүүсийн суусан байрлал ялгаатай байхаар суусан байж болох уу? Яагаад?

2. Дөрвөн хуваагчийн аль нэг хоёрынх нь нийлбэрээс үлдсэн хоёр хуваагчийн нийлбэрийг хасахад бүхэл тооны квадрат гардаг, яг 4 ширхэг натурал тоон хуваагчтай, 100-аас бага бүх натурал тоог ол.

3. Тоо бүр нь хөрш хоёр тооныхоо ялгаварт хуваагддаг байхаар 1, 2, 3, ... , 7, 8 тоонуудыг тойрог дээр байрлуул.

4. Гуравт хуваагддаггүй бүх дөрвөн оронтой тоонуудын тоог ол.

5. Зурагт өгсөн дүрсийг дөрвөн тэнцүү дүрсэд хуваа.

7-р анги, Сорил-III (2015.06.25 Архангай, Спортын сургууль)

1. а тооны $\frac{3}{5}$ хэсэг нь с бол с тооны ямар хэсэг нь а болох вэ?

А. $\mathbf{1\frac{1}{3}}$ **Б.** $\mathbf{\frac{5}{3}}$ **В. 1,6** **Г. 0,6**

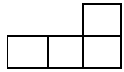
2. Цэцэгийн электрон цаг 20:11 болж байв. Хэдэн минутын дараа 0, 1, 1, 2 цифрүүдээс бүрдсэн цаг гарах вэ?

А. 40. Б. 45. В. 50. Г. 55.

3. Гурван оронтой тоонуудаас цифрүүдийнх нь нийлбэр 8 байх хамгийн их ба хамгийн бага тоог сонгов. Тэдгээрийн нийлбэр хэд вэ?

А. 707. Б. 907. В. 916. Г. 1000.

4. Дөрвөн квадратаас тогтох дүрс өгөгдөв.
Нэг квадрат нэмж шулууны хувьд тэгш хэмтэй байх дүрс үүсгэх хэдэн боломж байна вэ?



А. 1. Б. 2. В. 3. Г. 5.

5. 18 см урттай *AB* хэрчмийг *K, M, P* цэгүүдээр 3:5:6:1 харьцаатай дөрвөн хэрчимд хуваав. *AP* ба *KB* хэрчмүүдийн уртын зөрөөг ол.

А. 2,4. Б.2.5 В. 2.6 Г. 2.3

6. $\frac{2^6 \cdot 6^{18}}{2^{25} \cdot 9^9}$ утгыг ол.

А. $\mathbf{\frac{1}{3}}$ **Б.** $\mathbf{\frac{1}{6}}$ **В.** $\mathbf{\frac{1}{4}}$ **Г.** $\mathbf{\frac{1}{2}}$

7. 48 тоо хэдэн хуваагчтай вэ?

А. 16 Б.11 В. 10 Г. 12

8. 4дм^3=.....м^3

А.0.4 Б.0.0004 В. 0,004 Г. 0,04

9. Дугуйн талбай 46,24π см^2 бол дугуйн хүрээний уртыг ол

А. $\mathbf{13.6\pi}$ **Б.** $\mathbf{14.4\pi}$ **В. 3.14 Г.** $\mathbf{6\pi}$

10. A=$\{1, 2, 3, 4, 5\}$, B=$\{4, 5, 6, 7, 8\}$ бол A∩B=?

А. $\mathbf{\{4, 5\}}$ **Б.** $\mathbf{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}}$ **В.** $\mathbf{\{4, 5, 6\}}$ **Г.** $\mathbf{\{6, 7, 8\}}$

11. 10 тамирчны насны дундаж 22. Харин 11 настай тамирчин нэмж авбал насны дундаж хэд болох вэ?

А. 22 Б. 23 В. 21 Г.20

12. Тэгш өнцөгтийн талууд 5см, 7 см. Энэ тэгш өнцөгтийн периметртэй ижил периметр бүхий квадратын талбайг ол.

А. 35 см^2 Б. 36см^2. В. 49см^2 Г.25 см^2

13. Гэрэл бүх мөнгөнийхөө $\frac{2}{5}$ –аар зайрмаг авчээ. Зайрмаг 100 төг бол Гэрэл хэдэн төгрөгтэй байсан бэ?

А.244 Б.40 В. 248 Г. 250

14. Махыг борцлоход жингийнхээ 75%-ийг гээдэг бол 930 кг махнаас хэдэн кг борц гарах вэ?

А. 232.5 **Б. 697.5** **В. 23.5** **Г. 69.75**

15. $|x-1| < \frac{7^{2015}}{7^{2014}}$ тэнцэтгэл бишийг бод.

А. $]-6;8[$ **Б.** $]-6;8]$ **В.** $[-6;8[$ **Г.** $[-6;8]$

16. $128^2 \cdot 625^3$ хэдэн оронтой тоо вэ?

А. 10 **Б. 12** **В.13** **Г.14**

17. Усан санг нарийн хоолойгоор 10 цагт, бүдүүн хоолойгоор 4 цагт дүүргэнэ. Бүдүүн хоолойг 3 цаг, нарийн хоолойг 7 цаг ажиллуулахын алинд нь илүү ус орох вэ?

А.Бүдүүн **Б.Нарийн** **В.Ижил** **Г.Аль нь ч биш**

18. Цифрүүд нь өсөх эрэмбээр байрласан 7 оронтой тоо хэд байх вэ?

А. 3 **Б. 36.** **В. 7!** **Г. 7!-6!**

19. Дараалсан долоон цифрээс тогтох 7 оронтой тоо хичнээн байх вэ?

А. $4\cdot7!-6!$ **Б.** $3\cdot7!$ **В.** $7!$ **Г.** $3\cdot7!-6!$

20. Хоёр анги 80 сурагчтай. 7а ангийн сурагчдын 0,2 нь нөгөө ангидаа орвол хоёр ангийн сурагчдын тоо тэнцэнэ. Анги бүр хэдэн сурагчтай вэ?

А. 40 ба 40 **Б. 20 ба 60** **В. 45 ба 30** **Г. Аль нь ч биш**

10-11 р анги, Сорил-III (2015.06.25 Архангай, Спортын сургууль)

1. ABC гурвалжны талууд 10см, 13см, $\sqrt{m}$см бөгөөд $cos3A + cos3B + cos3C = 1$ бол m −ийн хамгийн их бүхэл утгыг ол.

2. $x^2 + xy + y^2 = (\frac{x+y}{3} + 1)^2$ тэгшитгэлийн бүхэл шийдийг ол.

3. Арифметик прогресс үүсгэх $x < y < z < t$ рационал тоонуудын хувьд $f(x) + f(t) = f(y) + f(z)$ тэнцлийг хангадаг $f: Q \to Q$ бүх функцийг ол.

4. a, b, c, d, e эерэг бүхэл тоонуудын хувьд $a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^4$ биелдэг бол $ac + bd$ тоог зохиомол тоо гэж батал.

Бага ангийн багш, Сорил-III (2015.06.25 Архангай, Спортын сургууль)

1. 36-д хуваагддаг $\overline{34x5y}$ хэлбэрийн бүх 5 оронтой тоонуудыг ол.

2. 69 улаан, 101 хөх нийт 170 шагайг тойргоор өрөхөд хооронд нь 33 шагай орших 2 улаан шагай олдохыг батал.

3. 0, 4, 18, 48, ?, 180, ? зүй тогтлыг ажиглан 0 тэмдгийн оронд байвал зохих тоог бич.

4. 2015 тоог дэс дараалсан натурал тоонуудын нийлбэрт хичнээн аргаар бичиж болох вэ?

5. Аль ч гурвынх нь нийлбэр анхны тоо байхаар хамгийн олондоо хичнээн тоог сонгон авч болох вэ?

Ангилал бүрд тэргүүн байр эзэлсэн багш сурагчид

анги	нэр	байр	Сум, сургууль
8, 9, 10-р анги	Н.Янжинлхам	1	1-р сур, 10-р анги
	Б.Мөнхтамир	2	1-р сур, 8-р анги
	Ч.Цэдэнбалжир	3	2-р сур, 10-р анги
11, 12-р анги	Б.Цэрэнлхам	1	1-р сур, 11-р анги
	Б.Батдэлгэр	2	1-р сур, 12-р анги
	Г.Ууганбаяр	3	3-р сур, 12-р анги
Багын багш	С.Үлэмж	1	Хашаат
	Б.Ариунаа	2	2-р сур
	Ц.Самбууням	3	Өндөр-Улаан
	С.Батчимэг	3	4-р сур
Дундын багш	Ж.Эрдэнэцэцэг	1	1-р сур
	Ц.Сүглэгмаа	2	Өндөр-Улаан
	Г.Пэрэнлэй	3	3-р сур

Сургалт зохион байгуулсан багийн гишүүд:

- Б.Сандагдорж- МУБИС, Математик, Байгалийн Ухааны сургуулийн Математикийн тэнхмийн эрхлэгч.
- А.Алтангэрэл- ШУТИС, Мэдээлэл, Холбоо Технологийн сургуулийн тэнхмийн эрхлэгч
- П.Цэрэнбат- ШУТИС, Мэдээлэл, Холбоо Технологийн сургуулийн багш
- Б.Ганбилэг- Олонлог сургуулийн математикийн багш
- М.Сэлэнгэ - Олонлог сургуулийн математикийн багш
- Ж.Уламбаяр- Архангай аймгийн БСГ-ын математикийн аргазүйч
- Д.Ганболд- Монгол улсын гавьяат багш, зөвлөх багш
- Ж.Ганбаатар – Орхон аймгийн Мон-Турк сургуулийн математикийн багш

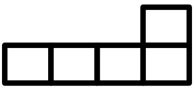
Шинжлэх ухааны гавьяат зүтгэлтэн, академич Р.Гончигдоржийн нэрэмжит бүсийн математикийн олимпиад. (2015.05.16)

дэд проф Б.Сандагдорж (МУБИС, МБУС)
дэд проф А.Алтангэрэл (ШУТИС, МХТС)

VI анги. (120 минут)

1. Хэрэв 2015 онд Бат төрсөн оныхоо цифрүүдийн нийлбэртэй тэнцүү настай байсан бол хэдэн онд төрсөн бэ?

2. Нэг сургууль бүжгийн эрэгтэй, эмэгтэй хүүхдүүдээс бүрдсэн бүжгийн хосыг сонгон шалгаруулах болов. 1-р хэсэгт шалгаруулсан хүүхдүүдийн $\frac{1}{5}$ нь эрэгтэй байв. 2-р хэсэгт шалгаруулсан хүүхдүүдийн тоо 1-р хэсэгт шалгаруулсан хүүхдүүдийн $\frac{6}{7}$ хэсэгтэй тэнцүү байв. Нийт шалгаруулсан хосын тоо 200-аас их 300-аас бага бол нийт хэдэн хос шалгаруулсан бэ?

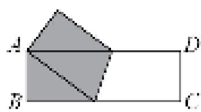
3. 7x7 квадратад  хэлбэрийн дүрс хамгийн олондоо хичнээнийг байрлуулж болох вэ?

4. Хоёр тоглогч ээлжлэн 5x5 таблицын нүднүүдэд 1-ээс 9 цифрүүдээс бичнэ. Аль нэг мөр эсвэл аль нэг баганын тоонуудын нийлбэр 25 гаргасан нь хожно (таваас бага цифртэй байж болно). Аль тоглогч хожих вэ?

VII анги. (120 минут)

1. 1, 2, 3, 4 цифрүүдийн тусламжтай бичигдсэн бүх гурван оронтой тоонуудын нийлбэрийг ол.

2. AB=3; BC=9 байдаг тэгш өнцөгт хэлбэртэй цаасыг C оройг A оройтой давхцатал нугалав. Зурагдсан хэсгийн талбайг ол. (Зураг 1)



3. 16-аас 30 хүртэлх тоонуудаас зарим тоог дарахад үлдсэн тоонуудын үржвэр натурал тооны квадрат болно. Хамгийн цөөндөө хэдэн тоог дарах вэ?

4. $m \cdot n^2 = 2016 \cdot (n+1)$ тэгшитгэлийг хангах m, n натурал тоонуудыг ол.

VIII анги. (150 минут)

1. $\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{2013\cdot 2015}\right)$ үржвэрийн утгыг ол.

2. 2015 тоог дэс дараалсан натурал тоонуудын нийлбэрт хичнээн аргаар бичиж болох вэ?

3. а) $\{1, 2, 3, \ldots, 150\}$ олонлогийг олонлог бүр 3 элементтэй, олонлог бүрийн элементүүдийн нийлбэр тэнцүү үл огтлолцох 50 олонлогт хувааж болох уу? б) $\{1, 2, 3, \ldots, 153\}$ олонлогийг олонлог бүр 3 элементтэй, олонлог бүрийн элементүүдийн нийлбэр тэнцүү үл огтлолцох 51 олонлогт хувааж болох уу?

4. ABC гурвалжинд AD, BE биссектрис татав. Харин DE нь ADC өнцгийн биссектрис болж байсан бол A өнцгийн хэмжээг ол.

IX анги. (150 минут)

1. *ABCD* тэгш өнцөгт дотор *M* цэгийг *BCM* гурвалжин адил талт байхаар авав. *CDN* нь адил талт гурвалжин ба уг гурвалжин дотор *M* цэг оршихоор *N* цэгийг авав. *AMN* гурвалжин адил талт болохыг батал.

2. $\frac{3x^2+3}{x+2}$ илэрхийллийн утгыг бүхэл тоо байлгах x-ийн авч болох утгуудын нийлбэрийг ол.

3. 23х23 квадратыг 1х1, 2х2, 3х3 квадратуудад хуваав. 1х1дүрс хамгийн цөөндөө хэд байх вэ?

4. $x^{\mathbf{2}} = y^3 + 7$ тэгшитгэлийн бүхэл тоон шийдийг ол.

X анги. (180 минут)

1. Хэрэв тойрогт багтсан ABC гурвалжны хувьд $AB > BC$ ба M нь AC нумын дундаж цэг байг. (M ба B цэгүүд AC шулууны нэг талд оршино.) M цэгээс AB хэрчимд буулгасан перпендикулярын суурь P бол $AP = PB + BC$ болохыг харуул.

2. $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{11}^4=15996$ тэгшитгэлийн бүхэл тоон шийдийг ол.

3. 2015^{2016}x2015^{2016} хүснэгтийн нүднүүдийг аль ч 2x2 квадратын нүднүүд дээрх тоонуудын нийлбэр 0 байхаар абслют утгаараа 1-ээс үл хэтрэх бодит тоонуудаар бөглөв. Тэгвэл хүснэгтэд бичигдсэн бүх тоонуудын нийлбэр 2015^{2016}-аас хэтрэхгүй гэж батал.

4. Яг гурван ялгаатай цифр агуулсан 5 оронтой тоо хичнээн байх вэ?

XI анги. (180 минут)

1. $(x^3+y)\cdot(x+y^3)=(x+y)^4$ тэгшитгэлийн бүхэл тоон шийдийг ол.

2. 3^n тооны цифрүүдийн нийлбэр 3^{n+1} тооны цифрүүдийн нийлбэрээс багагүй байх төгсгөлгүй олон n натурал тоо оршин байна гэж батал.

3. $<BAC=45^0$ байх ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O болог. O цэгийг дайрсан l шулуун AB, AC талуудыг харгалзан M, N цэгүүдэд огтолдог ба BN, CM хэрчмүүдийн дундаж харгалзан P, Q бол $<POQ$ –г ол.

4. Олон өнцөгтийг 100 тэгш өнцөгтөд хувааж болдог, 99 тэгш өнцөгтөд хувааж болдоггүй байг. Тэгвэл түүнийг 100 гурвалжинд хувааж болохгүй гэж батал.

XII анги. (180 минут)

1. $\sqrt{4-x\sqrt{4-(x-2)\sqrt{1+(x-5)\cdot(x-7)}}}=\dfrac{5x-6-x^2}{2}$ тэгшитгэлийн шийдийг ол.

2. $m\geq 2$ өгөгдсөн натурал тоо болог. Аливаа натурал n тооны хувьд $2^m|[x^n]+1$ байх x бодит тоо төгсгөлгүй олон оршин байна гэж батал.

3. Бичлэгтээ 0 цифр агуулаагүй бөгөөд $a_1a_2a_3+a_4a_5a_6+\cdots+a_{3n-2}a_{3n-1}a_{3n}$ нийлбэр тэгш байх $\overline{a_1a_2a_3\dots a_{3n-2}a_{3n-1}a_{3n}}$ хэлбэрийн тоо хичнээн байх вэ?

4. ABC гурвалжны $<ABC$ ба $<ACB$ өнцгүүдийн биссектрисүүд түүнийг багтаасан тойргийг K ба L цэгүүдэд огтолдог байг. $(BK)\cap(AC)=P$, $(CL)\cap(AB)=Q$ гэе. $[BC)$ цацраг дээр E цэгийг $BE=BC+CA$, $[CB)$ цацраг дээр D цэгийг $CD=CB+BA$ байхаар тус тус авав. DBL, ECK гурвалжнуудыг

багтаасан тойргийн төвүүд харгалзан $O_1,\ O_2$ ба $(CO_1) \cap (BO_2) = S$ бол $AS \perp PQ$ гэж батал.

Дундын багш. (210 минут)

1. $x, y, z > 0$ тоонууд $x^2 + y^2 = 16,\ y^2 + z^2 = 48,\ y^2 = xz$ системийг хангах бол $S = xy + yz$ −ийг ол.

2. 1, 2, 3, 4 цифрүүдийн тусламжтай бичигдсэн бүх гурван оронтой тоонуудын нийлбэрийг ол.

3. 2015 тоог дэс дараалсан натурал тоонуудын нийлбэрт хичнээн аргаар бичиж болох вэ?

4. *ABCD* тэгш өнцөгт дотор *M* цэгийг *BCM* гурвалжин адил талт байхаар авав. *CDN* нь адил талт гурвалжин ба уг гурвалжин дотор *M* цэг оршихоор *N* цэгийг авав. *AMN* гурвалжин адил талт болохыг батал.

5. $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{11}^4 = 15996$ тэгшитгэлийн бүхэл тоон шийдийг ол.

6. $\left(x^3 + y\right) \cdot \left(x + y^3\right) = \left(x + y\right)^4$ тэгшитгэлийн бүхэл тоон шийдийг ол.

7. Яг гурван ялгаатай цифр агуулсан 5 оронтой тоо хичнээн байх вэ?

8. Хэрэв x, y, z нь $xy + yz + zx = 1$ байх эерэг бодит тоонууд бол $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} \le 3\sqrt{2}(x^3 + y^3 + z^3)$ тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

9. Аливаа $k \in \{1, 2,\ \dots, n-1\}$ хувьд $a_{n-k} = a_k$ болон $a_n = a_0 = 1$ байх эерэг бүхэл тоон $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ коэффициенттой $P(x)$ олон гишүүнт өгөгдөв $(n \ge 2)$. Тэгвэл $a|P(b),\ b|P(a)$ байх төгсгөлгүй олон (a, b) бүхэл тоон хос оршин байна гэж батал.

Зарим бодлогын заавар.

XI-1. Өгсөн тэгшитгэлийг хаалт задалбал: $x^4 + x^3y^3 + xy + y^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ буюу $x^3y^3 + 2x^2y^2 + xy = 4x^3y + 8x^2y^2 + 4xy^3$ гэдгээс $xy(xy+1)^2 = 4xy(x+y)^2$ гэж гарна. Эндээс $(a, 0)$, $(0, b)$ гэсэн илэрхий шийдүүд олдоно, энд $a, b \in Z$. Харин $x \ne 0, y \ne 0$ үед $(xy+1)^2 = 4(x+y)^2$ тэнцлээс $xy + 1 = \pm 2(x+y)$ гэж гарна.

1. $xy+1=2(x+y)$ бол $(x-2)(y-2)=3$ буюу $(1,-1),(-1,1),(3,5),(5,3)$ шийдүүд олдоно.

2. $xy+1=-2(x+y)$ бол $(x+2)(y+2)=3$ буюу $(1,-1),(-1,1),(-3,-5),(-5,-3)$ шийдүүд олдоно.

XI-3. B,C цэгүүдийн O цэгийн хувьд тэгш хэмтэй орших цэгүүдийг $B_1,\ C_1$ гэе. Фалесын теоремоор $OP \parallel NB_1,\ OQ \parallel MC_1$. MC_1 шулуун ABC гурвалжныг багтаасан тойрогтой X цэгт огтолдог гэвэл AC_1BXCB_1 зургаан өнцөгтийн хувьд Паскалын теорем ашиглавал $B_1X,\ AC$ −ийн огтлолцлын цэг болон $M,\ O$ цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. Өөрөөр хэлбэл $MO,\ AC,\ B_1X$ шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно. Эндээс N цэг B_1X шулуун дээр оршино. Эндээс $\angle POQ=\angle C_1XB_1$. Нөгөө талаас $BC,\ B_1C_1$ нумууд адил урттай учир $\angle POQ=\angle C_1XB=\angle BAC=45^0$ болов.

XI-4. Эхлээд туслах лемм батлая.

Лемм. Хэрэв $2k$ өнцөгтийг тэгш өнцөгтүүдэд хувааж болдог бол түүнийг $k-1-$ ээс ихгүй тэгш өнцөгтүүдэд хувааж болно.

Леммийн баталгаа: Олон өнцөгтийн дотоод өнцгийн нийлбэр $S=(2k-2)\cdot 180^0$ ба түүний бүх өнцөг нь 90^0 эсвэл 270^0 байна. Хэрэв бүх өнцөг нь 90^0 тэнцүү бол энэ тэгш өнцөгт болно. A өнцөг 270^0 байг. Түүний нэг талыг үргэлжлүүлж олон өнцөгтийн нэг талтай огтлолцуулъя. Ингэхэд олон өнцөгт хоёр хэсэгт хуваагдана. Эдгээр хэсгүүдийн дотоод өнцгүүдийн нийлбэр нь олон өнцөгтийн дотоод өнцгүүдийн нийлбэрээс хэтрэхгүй (талын үргэлжлэл A өнцгөөс 90^0 өнцөг таслах ба тэр нь хоёр хэсгийн аль нэгд нь орно, нөгөө 180^0 нь талын үргэлжлэл гэээд уусч алга болно. Энэ тохиолдолд хоёр 90^0 өнцөг үүснэ). 270^0 өнцгийн тоо багасна. Хэрэв аль нэг хэсэг дээр нь энэ үйлдлийг давтаж болно. Эцэст нь 270^0-ийн өнцөггүй n хэсэгтэй болно. Өөрөөр хэлбэл n тэгш өнцөгт нь $S=360^0\cdot n\le(2k-2)\cdot 180^0$ гэдгээс $n\le k-1$ болж батлагдана.

Леммээс энэ олон өнцөгтийн оройн тоо 200-аас багагүй байна. Эсрэгээс нь энэ олон өнцөгтийг 99 тэгш өнцөгтөд хувааж болдог гэе. Түүнийг m гурвалжинд хуваадаг гэвэл өнцгүүдийн нийлбэр нь $S=180^0\cdot m$. Гурвалжны өнцгүүд олон өнцөгтийн өнцгүүдийн бүрэлдэхүүнд орно.

XII-1. Өгсөн тэгшитгэлийн хувьд $\frac{5x-6-x^2}{2} \geq 0$ буюу $2 \leq x \leq 3$ $(*)$ байна.

$1+(x-5)(x-7)=(x-6)^2$ буюу (*)-оос $x<6$ тул язгуураас $6-x$ гарна.

$4-(x-2)(6-x)=(x-4)^2$ буюу (*)-оос $x<4$ тул язгуураас $4-x$ гарна.

$4-x(4-x)=(x-2)^2$ буюу (*)-оос $x \geq 2$ тул язгуураас $x-2$ гарна.

Иймээс $x-2=\frac{5x-6-x^2}{2} \leftrightarrow 2(x-2)=-(x-2)(x-3)$. Эндээс $x=2, x=1$ гэж олдоно. (*)-оос $x=2$ болно.

XII-4. R нь B цэгт төвтэй $\sqrt{BA \cdot BC}$ радиустай инверс болон BK шулууны хувьдах тэгш хэмийн хувиргалтын композиц байг. Биссектрисийн чанараас $R(E)=Q$ ба мэдээж $R(C)=A$ байна. Мөн $\angle BAP=\angle BAC=\angle BKC$ болон $\angle ABP=\angle KBC$ гэдгээс $\Delta\ ABP \sim \Delta\ KBC$, эндээс $R(K)=P$. Иймд R хувиргалтаар $\Delta\ ECK$-г багтаасан тойрог $\Delta\ QAP$ –г батаасан тойрогт бууна. $\Delta\ APQ$ −г багтаасан тойргийн төвийг О гэвэл BO_2, BO шулуунууд BK шулууны хувьд тэгш хэмтэй. Адилаар CO_1, CO шулуунууд CL шулууны хувьд тэгш хэмтэй. Эндээс AO, BO, CO шулуунуудыг харгалзан $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$ өнцгүүдийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад үүсэх шулуунууд нэг цэгт огтлолцох бөгөөд огтлолцлын цэг нь S байна. Иймд AO, AS шулуунууд $\angle BAC$ өнцгийн биссектрисийн хувьд тэгш хэмтэй оршино. Иймд $\angle SAP=\angle OAQ=90^0-\angle APQ$ болж батлагдав.

ДБ-9. $(a,b)=(P(1),1)$ нь бодлогын нөхцлийг хангах нь ойлгомжтой. Мөн $P(1)>1$ учир нь $P(x)$ олон гишүүнт эерэг бүхэл тоон коэффициенттой. Хэрэв (a,b), $a>b$ нь бодлогын нөхцлийг хангах хос бол $(a,\frac{P(a)}{b})$ нь мөн бодлогын нөхцлийг хангах болон $\frac{P(a)}{b}>a>b$ гэдгийг харуулъя. Хэрэв үүнийг бид баталбал бодлого бодогдоно. Учир нь аливаа бодлогын нөхцлийг хангах хосоос нийлбэр нь ир байх өөр нэг бодлогын нөхцлийг хангах хос үүсгэж чадаж байгаа юм. Мэдээж $\frac{P(a)}{b}$ I$P(a)$ байна.

Олимпиадад медаль авсан багш сурагчдын нэрс

Ангилал	Нэр	Сургууль	медаль	Бэлтгэсэн багш
6-р анги	М.Мөнх-Оргил	Өлзийт	Алт	С.Батжаргал
	Т.Номин	Ар, 1-р сур	Мөнгө	Р.Энхтунгалаг
	Г.Бат-Өлзий	Эрдэнэмандал		Отгонжаргал
	М.Дамдиндорж	Ар, 4-р сур	Хүрэл	У.Анхтуяа
	П.Гантигмаа	Ар, 4-р сур		Ц.Баярмаа
	Б.Буянтогтох	Ар, 4-р сур		Батцэцэг
7-р анги	О.Батзаяа	Өндөр-Улаан	Алт	Ц.Сүглэгмаа
	Б.Мөнхтамир	Ар, 1-р сур	Мөнгө	Ж.Эрдэнэцэцэг
	М.Анужин	Ар, 1-р сур		Б.Нямсүрэн
	А.Болортуяа	Ихтамир	Хүрэл	П.Наранцацрал
	А.Болорцэцэг	Ихтамир		П.Наранцацрал
8-р анги	Б.Баасанжаргал	Ар, 1-р сур	Алт	Ж.Эрдэнэцэцэг
	О.Мөнх-Эрдэнэ	Батцэнгэл	Мөнгө	Сайжирмаа
	А.Анхчимэг	Ар, 2-р сур		
	М.Мэргэнсайхан	Ар, 1-р сур	Хүрэл	Ж.Эрдэнэцэцэг
	П.Ган-эрдэнэ	Цахир		Байгалмаа
	С.Ариунжаргал	Ар, 4-р сур		Ц.Бямбажав
9-р анги	Н.Янжинлхам	Ар, 1-р сур	Алт	Ж.Эрдэнэцэцэг
	Б.Хонгорзул	Ар, 1-р сур	Мөнгө	Ж.Эрдэнэцэцэг
	Ч.Цэдэнбалжив	Ар, 2-р сур		
	Т.Төгөлдөр	Ар, 1-р сур	Хүрэл	Ж.Эрдэнэцэцэг
	Б.Жамба	Ар, 3-р сур		Баярзаяа
	Д.Бат-Эрдэнэ	Ар, 3-р сур		Баярзаяа
10-р анги	Б.Цэрэнлхам	Ар, 1-р сур	Алт	Ж.Эрдэнэцэцэг
	З.Ууганбаяр	Эрдэнэмандал	Мөнгө	
	М.Баялагмаа	Ар, 1-р сур		А.Сайнжаргал
	Ч.Бямбабаяр	Өндөр-улаан	Хүрэл	Дэнсмаа
	Э.Анхбаатар	Ар, 2-р сур		Ч.Алтаншагай
	Ч.Бямбадолгор	Ар, 4-р сур		
	Э.Мичидмаа	Ар, 1-р сур		А.Сайнжаргал

<table>
<tr><td rowspan="5">11-р анги</td><td>Э.Жамбиймолом</td><td>Ар, 1-р сур</td><td>Алт</td><td>Ж.Эрдэнэцэцэг</td></tr>
<tr><td>Б.Лхамхүү</td><td>Ар, 1-р сур</td><td rowspan="2">Мөнгө</td><td>Ж.Эрдэнэцэцэг</td></tr>
<tr><td>Б.Цогт-Очир</td><td>Ар, 1-р сур</td><td>Ж.Эрдэнэцэцэг</td></tr>
<tr><td>Г.Хонгорзул</td><td>Ар, 2-р сур</td><td rowspan="2">Хүрэл</td><td>Ч.Алтаншагай</td></tr>
<tr><td>Б.Батдэлгэр</td><td>Ар, 1-р сур</td><td>Ж.Эрдэнэцэцэг</td></tr>
<tr><td rowspan="5">12-р анги</td><td>Ч.Хишигдэлгэр</td><td>Өлзийт</td><td>Алт</td><td>Өлзийсүрэн</td></tr>
<tr><td>М.Дамбийбалжир</td><td>Ар, 3-р сур</td><td rowspan="2">Мөнгө</td><td>Г.Пэрэнлэй</td></tr>
<tr><td>Э.Дагиймаа</td><td>Хотонт</td><td>Ж.Оюун-Эрдэнэ</td></tr>
<tr><td>О.Уранбилэг</td><td>Ар, 3-р сур</td><td rowspan="2">Хүрэл</td><td>Г.Пэрэнлэй</td></tr>
<tr><td>О.Долгорсүрэн</td><td>Хашаат</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">Багш</td><td>Ц.Оргил-Эрдэнэ</td><td>Ар, 2-р сур</td><td>Алт</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>Г.Пэрэнлэй</td><td>Ар, 3-р сур</td><td rowspan="2">Мөнгө</td></tr>
<tr><td>Ж.Батбаяр</td><td>Ар, 3-р сур</td></tr>
<tr><td>Ж.Эрдэнэцэцэг</td><td>Ар, 1-р сур</td><td rowspan="3">Хүрэл</td></tr>
<tr><td>Б.Бадамдорж</td><td>Ар, 2-р сур</td></tr>
<tr><td>Ганчимэг</td><td>Ар, 3-р сур</td></tr>
</table>

Бодлогуудыг доктор дэд проф Б.Сандагдорж бэлтгэж В.Адъяасүрэн, Б.Сандагдорж, гавьяат багш Д.Ганболд, Ж.Уламбаяр, З.Бат-Эрдэнэ, АРХАНГАЙ аймгийн засаг дарга Д.Бат-Эрдэнэ нар Архангай аймгийн 4-р сургууль дээр амжилттай зохион байгуулсан.

Гарчиг